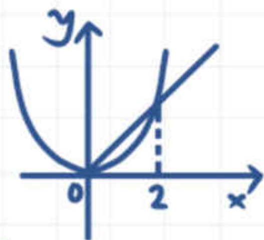
学好数学并不难



MATH

（套装共2册） 代数+几何

这个世界上只有两种人，
一种是喜欢数学的，另一种是不知道自己喜欢数学的。



VISIT...

LANZAROTE Caliente.com

学好数学并不难

MATH

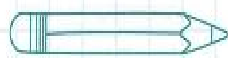
（套装共2册） 代数+几何

这个世界上只有两种人，
一种是喜欢数学的，另一种是不知道自己喜欢数学的。



总目录

学好数学并不难．代数
学好数学并不难．几何

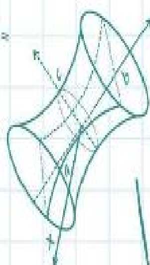


MATH

学好数学并不难

孙亮朝 / 著

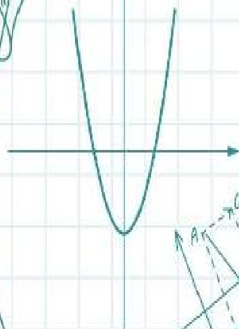
代数





$\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=$

$f(x)=ax^2+bx+c$



$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

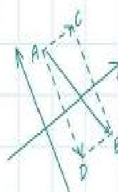
IT爸爸写给孩子的数学书

用故事解释数学思想

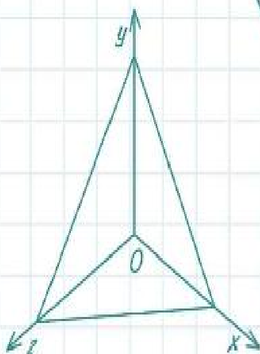
用案例引入数学知识

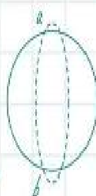
用生活讲解数学应用

好看好学、易懂易学



数学成绩不好的父母也能教出100分的孩子





浙江人民出版社

学好数学并不难
代数

孙亮朝 著

浙江人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

学好数学并不难．代数／孙亮朝著．－杭州：浙江人民出版社，2020.5

ISBN 978-7-213-09432-3

I．①学…　II．①孙…　III．①代数课—初中—教学参考资料　IV．①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第182362号

学好数学并不难．代数

孙亮朝　著

出版发行：浙江人民出版社（杭州市体育场路347号　邮编310006）

市场部电话：（0571）85061682　85176516

责任编辑：王　燕

特约编辑：陈帷宏　孟庆博

营销编辑：陈雯怡　陈芊如

责任校对：戴文英

责任印务：聂绪东

封面设计：Amber Design琥珀视觉

电脑制版：北京唐人佳悦文化传播公司

印　　刷：唐山富达印务有限公司

开　　本：710毫米×1000毫米　1/16

印　　张：15

字　　数：168千字

插　　页：1

版　　次：2020年5月第1版

印　　次：2020年5月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-213-09432-3

如发现印装质量问题，影响阅读，请与市场部联系调换。

自序

调查显示，很多人讨厌数学．这样的结果并不让人感到意外，因为在传统教育体制的束缚下，数学被教条化甚至被妖魔化了，大家所认识的数学只是课本上的数学、试卷上的数学，是僵化的数学．在我看来，这个世界上应该只有两种人：一种是喜欢数学的，另一种是不知道自己喜欢数学的．因此长久以来，我一直在积蓄一种力量，期望通过自己的努力，把真正的数学呈现在孩子们的面前．

人类天生就有极大的好奇心和求知欲，这驱使我们仰望星空，从日月星辰的运转中捕捉数学的韵律；让我们亲近自然，从四季变换中寻找生命的价值．这是一种欲望，让我们不再满足于眼前的物质利益；这是一种理想，让我们在求真求美的过程中构造起一个全新的精神世界．

数学不是抽象的符号，而是一种真实的存在．数学带来的真实感超越了我们自身，超越了我们所熟悉的一切．这种真实感曾让我一度像毕达哥拉斯一样，认为数是这个世界的本原．然而我还是克制自己，因为我不希望在认识世界之前，妄言对世界的改变．

数学是美的，这是一种超凡脱俗的美，是高冷到不食人间烟火的美，任何一个热爱数学的人都能感受到它．很多人都曾试图描述数学之美：有人通过斐波那契数列的奇妙来描述，有人通过分形图案的精美来描述，有人通过生物百态来描述，也有人通过宇宙的和谐来描述．然而我认为，所有这些都不足以代表数学的美，数学的美是与生俱来的，与它的真实性无关，与它的实用性无关．

一块金子加一块金子可以得到两块金子，一颗沙粒加一颗沙粒可以得到两颗沙粒．然而，数学的价值并不因为计算黄金而变得昂贵，也并不会因为计算沙粒而变得卑贱．荷花上的数学和淤泥中的数学没有不同，宫殿里的数学和沟渠里的数学也无区别．

我一直希望能够用最优美的线条来勾勒数学之美，但数学之美却没有外形；我一直希望用最柔美的乐曲来为数学之美做铺垫，但数学之美没有声音．连接理论与实际，面向历史与未来，从此，数学具有了生命

和活力，它不再是枯燥的公式和定理，不再是乏味的函数和方程，它是花瓣上闪耀的露珠，它是蝴蝶舞动的翅膀．它架构起孩子认知世界的舞台，它赋予我们征服世界的力量．我常把数学比作钻石，钻石本身不会发光，它折射出的是太阳的光彩；数学本身也并不完美，它呈现出的是人类的智慧．

目录

CONTENTS

自序

一　一旦你了解数学，你一定会爱上它

◎ 数学，改变你的一生

◎ 除了数学，没有任何一件事能够百分百确定

◎ 数学考100分的同学比考50分的同学聪明多少倍

◎ 从一个最简单的问题开始：人为什么要数数

◎ 人类的抽象能力：1 + 1到底等于几

◎ 世间万物都是可以计算的

二　初中数学学什么

◎ 对变化的数进行计算：怎样才能赚到最多的钱

◎ 世界上第二宝贵的东西：空间

◎ 想要打仗，需要你懂几何、代数和解析几何

三　数系的扩充

◎ 流血的数字：0中隐藏的秘密

◎ 赚钱的数字：负数的存在

◎ 为什么负负得正：负数的加减法

◎ 负数乘除法的变化：除法是乘法的逆运算

◎ 数字都是没有算完的算式：一切都在运动变化之中

四　代数架构和代数思维

◎ 我们在日常生活中接触的一切，都是代数

◎ 代数的知识架构：从宏观角度认识代数

◎ 代数和算术的差别：代数思维是难题化简、分工协作

五　用数学语言描述世界

◎ 代数的目的：用纯数学的语言描述复杂的世界

◎ 寻找隐含的数字：鸡兔同笼和浪费水的水池子

◎ 寻找隐含的规律：逆水行舟和溶液配比

◎ 怎样洗衣服最干净？用算式计算出结果

◎ 手机图标应该分类吗？数学无处不在

六　等式和不等式
◎ 等式的性质：三个基本
◎ 一元一次方程：等量关系
◎ 无所不在的不等式：差异的存在
◎ 不等式的性质：方向的改变
七　加减乘除的世界和人生
◎ 把问题摆在桌面上讲：加减乘除的计算规律
◎ 乘法也没什么不同：乘法分配律
◎ 负数会给我们添乱吗：数字带着加减号一起移动
◎ 减法和除法的独特优势：三个共同点
◎ 人生中的加减乘除：平衡和取舍
八　二元一次方程
◎ 单项式：几个数和几条潜规则
◎ 多项式的禁忌：混合运算的顺序不可随意调整
◎ 多项式加减：凑成八个算式
◎ 二元一次方程组：两个变量相互加减
◎ 生活中的二元一次方程：列个方程组解决一切问题
九　学习方法和解题思路
◎ 通用的解题思路：不断试错，不断修正
◎ 更好、更快的解题思路：在知识之间建立关联
◎ 让知识融会贯通：分类和搭建
◎ 更上一层楼：忘掉知识的具体形式，只看本质
十　指数和乘方运算
◎ 神奇的指数：几何级数的变化
◎ 同底数幂的乘除：四个运算规则
◎ 幂的乘方：商的幂等于幂的商
◎ 乘方的逆运算：六种运算的关系
十一　根式运算
◎ 杀人的数字：$\sqrt{2}$ 里隐藏的一桩血案
◎ 初中数学的所有数字类型
◎ 根式的运算法则：乘除、乘方及化简方法
◎ 乘方开方混合运算：规律和禁忌
十二　多项式运算

◎ 改变世界的二次方程：算出最优解
◎ 多项式乘法：一个公式的多种变形
◎ 完全平方公式：代数、图形和类比
◎ 平方差公式：平方差和差的平方
十三　因式分解
◎ 因式分解：多项式展开
◎ 学会“相面”：熟记特征
◎ 十字相乘：分解二次三项式
◎ 强行配方：通用分解方法
十四　分式运算
◎ 学会问问题：0为什么不能做除数
◎ 奇怪的分式运算：初中代数的最后一个运算法则
十五　二次方程及其应用
◎ 二元和二次的区别：如何判断和解决
◎ 给商品定价：一个二次方程问题
◎ 怎样最赚钱：有解和无解
◎ 最后一个问题：学习应该熬夜吗
返回总目录

一　一旦你了解数学，你一定会爱上它

◎ 数学，改变你的一生

从今天开始，我们来系统地聊一聊初中数学．一听到“数学”两个字，很多人立刻就开始头疼：一上数学课就走神，一做数学题就打盹，甚至远远看到数学老师，都恨不得躲着走．不过在我看来，这世界上应该只有两种人，一种是喜欢数学的，一种是不知道自己喜欢数学的！那么，为什么有这么多的人讨厌数学呢？因为你所认识的数学，都是课本上的数学、僵化的数学，一旦你真正了解了数学，你一定会爱上它．《庄子》中记载了这样一个故事：[1]

> 有一天，齐桓公正在读书，被一个叫扁的工匠看到了．扁问：“大王，您读的是什么书？”桓公说：“这是圣人的书．”扁说：“如此说来，大王您读的只不过是圣人的糟粕而已．”齐桓公一听，气坏了，说：“你一个工匠，从来不读书，你知道什么？”扁不慌不忙地回答：“我是在做轮子的过程中感受到的．如果做轮子时轮轴做得太松，轮子就太过光滑不够坚固；如果太紧就会导致轮子转动困难；只有不松不紧的时候，才刚好合适．但不松不紧的感觉我却无法通过语言描述，只能在反复练习中去领悟．照此看来，您所读的书，不也就是圣人的糟粕吗？”

怎么样？通过这个故事，我们是不是也应该有所感悟呢？那些写在数学书上的定义、定理、公式，是不是僵化的数学呢？真正的数学，绝对不会是这么枯燥的．在19世纪的英国，还有一个这样的故事：

> 英国爱丁堡大学有一位著名的数学教授叫罗比森．有一天罗比森上课的时候，发现教室后面坐着一个衣衫褴褛的年轻人，于是教授就问他：“孩子，你是这里的学生吗？”这个年轻人说：“对不起，教授，我不是您的学生，只是一名印刷厂的工人．我家境贫寒，从小就辍学了，因为自己喜欢数学，所以就来听您的课．”教授一听，心里挺感动的，但是他也真诚地对这

个年轻人说："孩子，数学学的都是一些纯理论性的东西，对你的生活没有什么帮助，你工作一天多辛苦，怎么不去学一点更实用的东西呢？"年轻人听了就落泪了："教授，您知道吗？我作为一个印刷工人，每天都要辛苦工作16个小时，工作非常枯燥、非常无聊，搞得我连吃饭、睡觉都不得安生，我怎么能不知道人生的艰辛和痛苦呢？可是，既然人活着就只能承受这样的苦难，就让我用数学的快乐，在人生的苦酒里加一点糖吧．"教授听完，就决定要好好培养他．这个年轻人就这样彻底改变了自己的命运，他就是著名的数学家华里斯．

瞧见没有？华里斯可是把数学课当成"郭德纲的相声"听了，这数学得有多好玩！有人可能会说，那是华里斯，要是我，我就不喜欢学数学，我就喜欢待在家里玩游戏．真的是这样吗？我看你是既不了解数学，也不了解你自己！不信，我们就一起来做个实验看看．

我们想象一下这样一个场景：周末，你躺在沙发上轻松自在地玩游戏．这个游戏你非常喜欢，所以你玩得非常专注、非常投入，也非常开心．可是玩着玩着，你突然发现，在你身边，有一把椅子慢悠悠地飘了起来．请问，这时候，你还躺得住吗？你还玩得下去吗？想都不用想，你肯定"忽"地就站起来了，你一定会想，这个椅子怎么突然就飞起来了？

你不是说自己最喜欢做的事情是玩游戏吗？为什么一把椅子就让你玩不下去了呢？要知道，这把椅子跟你可没有什么关系，那为什么你会在第一时间就站起来寻找原因呢？很简单，因为人类是有智慧的生命，基因注定了每个人都具有非常强大的好奇心，好奇心也是人类和动物的本质区别之一．再继续设想一下，我们什么时候不关注这把椅子了呢？等我们找到椅子飞起来的原因以后．

假设我们发现椅子上面拉着一根细线，或者我们发现这椅子是纸糊的，它特别轻，风一吹就动了．总而言之，不管具体原因是什么，只要找到了一个合理的解释，我们立刻就不会再关心它了，转回身该干什么还干什么去了．但是，如果你找来找去，没发现这把椅子飘起来的原因，那这事儿可就麻烦了，你一定会坐立不安，甚至会招呼一帮人来帮

你分析，直到找到原因为止．如果仍然找不到原因，恐怕你就得赶紧搬家了，难道你还敢继续在这个房子里住下去吗？

这件事说明了什么呢？它说明我们的好奇心是由求知欲推动的，所谓求知就是不断找出一个个事件背后的原因，找出一个个奇怪现象的合理解释．我们把所有这些解释归集到一起，变成了世界上所有事件背后的根本原因，所有现象背后的总规律．这个总规律，不就是知识吗？人类求知的欲望大于一切欲望，人类求知的乐趣大于所有的乐趣．那么，数学是什么呢？数学是所有知识的根基：数学里有各种各样的精彩故事、各种各样的奇思妙想．在本书中，我会从理论到实际，从历史到未来，把这些好玩的东西串起来，这远比一把飘起来的椅子要好玩得多．

那么，为什么数学会有这么大的魅力呢？在讨论这个问题之前，请你先思考一个看似和数学无关的问题：“请问，你怎么知道现在的自己是正在做梦呢，还是醒着呢？”

◎ 除了数学，没有任何一件事能够百分百确定

电影《夏洛特烦恼》中有这样一个场景：夏洛一觉醒来，发现回到了十几年前的教室里，之前的一切都是在做梦．其实我们在生活中也偶尔会有这样的体验：在某个时刻你会突然怀疑：“我现在是不是在做梦呢？”那么，我们怎样判断自己是不是在做梦？

有人说咬咬手指头试试疼不疼，其实这个方法一点都不灵，如果你真是在做梦，咬自己的手指头，那还真能感觉到疼痛．还有人说，像《盗梦空间》里的“小李子”(2) 一样给自己做一个小陀螺，如果小陀螺不倒就证明自己在做梦．其实这就更行不通了，因为《盗梦空间》的主角的办法是用来判断自己是不是在别人设计的梦里，而如果是自己主动做的梦那就没办法识别了．有人说，等着就行了，如果是在做梦一定会醒来，而且时间不会很长．那么，万一我们是躺在床上一动不动的植物人呢？我们就会持续地做一个很长的梦，所以通过时间长短来判断是不是在做梦，也是无效的．

那么，究竟怎么样才能知道自己是不是在做梦呢？答案是，没有任何办法！这个答案可能让你觉得不敢相信，甚至会摧毁你的信心．因为，如果周围的一切都是在梦中，那么人生就变得毫无意义了．但没办法，这就是事实．我们不但没有办法判断自己是不是正在做梦，还没有办法判断自己是不是一个活人．我们有可能是个被连接了很多电线的植物人，有可能是一个全自动的机器人，还有可能是一个计算机游戏里的虚拟人物，当然，我们也有可能是个活生生的人．这一切都是有可能的，但又都不能百分之百确定．

……

让我们结束这些惊悚的想象，先来看一道数学题：

> 小明有1个苹果，妈妈又为他买了1个苹果，小明现在有几个苹果？

我们上幼儿园的时候都知道答案是2个．但是你见过小明吗？你见过小明的妈妈吗？你见过他的苹果吗？你凭什么认为他现在有2个苹果？但是我们就是确信，丝毫都不怀疑．这难道不奇怪吗？我们几乎天天和父母在一起，但是却没有任何办法证明他们就是自己的父母；我们根本不知道小明是谁，但仍然知道他有2个苹果，为什么？

请注意，我不是在讲1＋1为什么等于2，我讲的是为什么我们会对1＋1＝2如此的确信．不仅在真实的世界里1＋1＝2，在镜中的世界里也是1＋1＝2，在电脑游戏里1＋1＝2，甚至就连我们做梦的时候，也不会梦到一个1＋1不等于2的场景．为什么这个世界的一切都不可知，而数学却让我们如此确信？很简单，因为数学是从我们已知的万事万物中抽象总结出来的最基本、最稳定、最精确、最具有普遍意义的知识．正因为如此，数学才如此迷人；正因为如此，才会有无数的智者为之奋斗．

人的生命是有限的，而真理是永恒的．历史上，有无数的智者通过数学的伟大见证自己生命的伟大，通过数学的魅力讲述自己人生的精彩．鲁道夫的墓碑上记载的是圆周率，阿基米德的墓碑上记载的是与球外切的圆柱，高斯的墓碑上记载的是正十七边形，而丢番图则在墓碑上用代数题描述了自己的年龄．无数的古圣先贤已经用数学为我们搭建了智慧的阶梯，我们要站在他们的肩膀上，为自己有限的生命找到永恒的意义．是的，数学是人类智慧的精华，数学是现代科学的基础．【更多书籍分享vx:booker113】

今天的世界：

是一个数学定律在维持着宇宙的秩序，它就是引力定律$F=\frac{GMm}{R^2}$；

是一个数学方程在保障着世界的安全，它就是质能方程$E=mc^2$；

是一个数学公式在维护着经济的稳定，它就是货币公式$MV=PT$．

听到这里，你可能会说了，我知道数学很伟大，但是数学太难了，学数学得有天赋才行，数学好的人那都是天生的神童，一般人哪学得会．那么，接下来就请你思考这样一个问题：你认为数学考100分的人，比考50分的人聪明多少倍呢？

◎ 数学考100分的同学比考50分的同学聪明多少倍

这个问题的答案可就五花八门了：有人说，100比50多一倍，所以就比他聪明一倍．有人说，能考100分的人都是天才，这样的人比考90分的人都要聪明10倍，要是把他跟考50分的人相比，那不得聪明100倍了，不信你看看课堂上，老师问到难题的时候，每一次都只有最聪明的同学回答对了．那么，结果究竟如何呢？

我的答案是：考100分的同学比考50分的同学只是聪明了一点点．如果你不信的话，我们可以重新出一套卷子，把这两个同学从幼儿园开始一直到现在，所学的所有的知识都列出来，汇总成一份几百页的大卷子，他们两个考试的成绩还会差一倍吗？要知道，从小到大所学的知识当中，绝大部分可都是生活常识．而在这些方面，人和人之间基本没有差别，所以从这个角度来看，在数学方面考100分的同学比考50分的同学也就只是聪明了一点点而已．

我知道，这个说法可能会带给你一种强词夺理的感觉．因为在我们普通人看来，好像每个班里都有那么一两个数学尖子生．人家的数学学得非常棒，甚至连老师都不放在眼里．最关键的是，人家不但成绩好，而且看上去从来不好好学习，在课堂上也是该玩玩、该闹闹．在我们心目中，这样的同学那就是神一般的存在，只能让我们自愧不如．这样看来，好像数学好的人都是天生的神童，我们一般人很难达到人家那样的境界．

真的是这样吗？

法国19世纪有一个著名的昆虫学家，名叫法布尔，他同时也是大名鼎鼎的文学家，被法国人誉为昆虫界的“荷马”．别看文学天赋很高，但他从小就是一个数学白痴，因此他极其讨厌数学．但机缘巧合的是，他在师范学院毕业以后，来到了一个穷乡僻壤的山村小学教书．那村子里穷的是啥都没有，像法布尔这样一个有文化的人，在村民的眼里，就是神一般的存在．巧的是，村子里刚好有一个年轻人想考大学，他就来向

法布尔请教数学．可是法布尔哪会数学，但他又不好意思承认自己不会，于是就借故推托了几次，但是这个年轻人很有耐心，天天都来求他．最后实在是搪塞不过去了，法布尔只好答应了．于是头一天晚上，法布尔就找来一本厚厚的数学教材，想自己先学学，可是一本教材他翻来翻去翻了两个小时，结果仍然是啥也没看懂．可是这样不行啊，明天人家就来上课了，法布尔就只能硬着头皮，抱着那本教材翻来覆去看，最后终于读懂了一道题，那就是牛顿的二项式定理．法布尔折腾半宿，实在是困得不行，倒头就睡了．

第二天，那个年轻人准时来上课了，法布尔就给他讲二项式定理，没想到讲得挺好，课堂效果非常不错．于是当天晚上，法布尔就接着啃教材，这样循环反复折腾了半年多．不但法布尔学会了数学，年轻人也考上了大学．从此以后，数学的大门就向法布尔敞开了，法布尔领略到了数学的魅力，再也不觉得数学难学了，后来他还继续坚持学习数学，拿到了数学学士学位．要知道，在此以前，法布尔可是一个数学白痴．这次学数学，纯粹是被那个年轻人逼得没办法了，要不是有这个年轻人向他请教，估计这辈子他都不会主动去学数学．

通过这个故事我们不难发现：那些我们眼中的所谓的数学天才，所谓的神童，其实只不过是比我们先学了一天，比我们提前几分钟找到了答案而已．有一个笑话是这么说的：有两个朋友在野外玩的时候，突然出现了一只老虎，一个人立刻蹲下开始系鞋带，另外一个朋友就笑话他："哥们儿，你也太逗了，难道你系紧了鞋带就能跑得过老虎吗？"这时候系鞋带的朋友说了："我不需要跑得过老虎，我只要跑赢了你，我就活了．"你想想看，是不是这样．如果在你的一生之中，一直有这样一个朋友，他明明和你一样聪明，但是每天你只是比他学得早一点点；遇到任何问题的时候，都比他提前一点点找到答案；在工作中，你又总是比他早一点点解决问题．这样积累下来，可就不得了，在所有人眼中，你就是一个天才，而你的朋友就只能被看作是一个普通人．我们所熟知的绝大多数数学家和科学家，都像法布尔一样，自身并没有多少天赋，都是后天努力的结果．说一千，道一万，这些所谓的数学天才，只不过是证明了一句俗话，那就是：早起的鸟儿有虫吃．

当谈到学习数学的难度时，我常常把它比作骑自行车．当你还不会

骑车的时候，骑自行车这件事情就像特技表演一样，只有两个轮子的家伙，怎么可能不倒呢？但是，只要你经过反复的练习，一旦找到感觉，瞬间就会骑了；而且那种感觉一旦找到了，骑车一点都不难了；一旦学会了，那就是一辈子忘不了的．在后面的内容中，我们就要正式开始数学课程了．我会用一些精彩的历史故事作引线，把数学在实际生活中的用途当作珍珠，把所有的初中数学知识串成一条漂亮的珍珠项链，送给每天起早贪黑、努力学习的孩子们．希望你尽早找到学习数学的感觉，找到学习数学的乐趣．

◎ 从一个最简单的问题开始：人为什么要数数

不知道你有没有听过这样一个笑话：有个地主给自己的孩子请了一位老师，这位老师要教孩子学写字，一就是一横，二就是两横，三就是三横．这孩子一看，行了，写字不就这么简单吗？我都学会了．这地主听了当然很高兴，于是就把这位老师给辞退了．有一天他要下个请帖请人吃饭，就让自己的孩子写请帖，可是孩子从早晨写到中午，写了半天还没写完．地主就着急了："你这孩子到底会不会写？"这个孩子说："你请什么人吃饭不好，偏偏请个姓万的人，我从早晨到中午，刚写了五百画．"

怎么样，是不是觉得这地主的儿子太傻了？你还别说，人类最早还真就是这么数数的．

假如翻开古希腊的泥板，你就会发现，他们做的数学题上，这从一到九的数字，还真就跟我们玩的麻将牌差不多，一就是一条竖线，九就是九条竖线．无独有偶，在古埃及的纸草书上，也是用类似的方法来记载数字的．不过，我们今天要讨论的不是数字写成什么样子，而是人类为什么要数数，特别是，世界上第一个人为什么要数数？我们要知道，无论是什么事情，要想作为一种文化长久传承下去，它就不仅要好玩，还要有实用价值．人类是从几十万年前的古猿进化来的，在那么久远的年代，人们可能连种庄稼都不会，平常的生活方式也就是采摘和打猎，那么他们数数有什么用呢？

你可能会说，数数自己摘了多少野果子，打了多少野兔子，好做到心里有数．没错，可是心里有数又有什么用呢？别说是打野兔的古代猿人了，就是今天很多开小卖部小店的老板，都不记现金流水账，为什么不记账呢？因为店里就自己一个人，无论是赚钱了还是赔钱了，都是自己的，无论是记账还是不记账，都不会让自己多赚钱，这样一来记账就成了一种没有任何价值的负担，所以大多数的小老板宁可不记账．如果连现代人都这么想，那么古代猿人就更没有道理数数了，不信你看看猴子和猩猩，什么时候见过它们数数？

到这里你可能会想：一个人的小店不用记账，多个人的大超市就一定需要记账了，为什么呢？因为大家一起工作，如果没人记账的话，钱弄丢了都不知道是谁弄丢的，这样一来就没办法开展工作了．所以古人也一定是因为一起劳动，所以才需要数一数猎物的数量，只有数清楚了，才能把猎物很好地分配下去．如果你能想到这一层，就很不简单了，共同劳动、共同分配是需要数学的．但是问题在于：你怎么知道这是第一个需要数数的场景呢？要知道，把一个大数平均分成几份相当于做除法，古人还没有学会数数，就会发展出除法这么高级的计算能力吗？显然是不能的．就算古人用减法来当除法使用，可是减法也不是最简单的数学知识，最简单的数学知识就是数数，因此这绝不会是人类第一个数数的场景．

你也许会想到：在大伙儿出去劳动之前，需要数数来确定人数，等劳动了一天收工回家的时候，也要确定一下人数，避免有人走丢了．这样的工作类似于部队打仗前后要通过报号来核对人数．不错，这是一个相对独立的使用场景，它不需要加减法，只需要一个一个地把人数一遍就可以了．而且共同劳动的场景肯定是在平分食物之前发生的，极有可能这就是人类最早用到数数的场景．但是，别忘了，我们问的是世界上第一个数数的人．这一群人去干活的时候，应该是很多人都有了数数的能力了，所以这个场景下数数的肯定也不是第一个人．那么，第一个数数的人到底是谁呢？他到底在数什么呢？

现在，让我们重新梳理一遍思路：首先，第一次数数肯定不是数东西，因为东西如果是自己的，完全没必要数；如果数完东西要分配给别人，那就是高级计算能力，肯定不是第一次数数．其次，也不是数人，因为人如果多到要数的时候，就不是一个人会数数了．那么，在这个世界上，除了物和人之外，还有什么能数呢？数它又有什么意义呢？

答案是：时间！日出日落，月圆月亏；暑去寒来，季节变换；花开花落，草木枯荣．人类要保障自己的生存就必须要面对自然的变化，我们可以不数自己打了几只兔子，因为无论怎么数，兔子都不会多出一只来．但是，我们不能不知道还有几天就要过冬了，我们不敢不计算还需要储备多少粮食，我们不能不判断还有几天水果就要成熟，必须及时过去采摘，否则果实可能会被别的部落的人摘掉．时间是这个世界上最宝

贵的财富，没有任何一种财宝能够换来哪怕一秒钟的时间．古人珍惜生命，敬畏自然，所以他们不敢、不能，也不会不在乎时间的宝贵．他们不仅能在日出日落中感受时间，不仅能在月圆月亏中感受时间，他们还能在上万颗繁星中准确地找到与众不同的5颗行星，再根据行星的位置变化来感受时间的变化．这需要多么大的耐心，这需要多么大的勇气，这需要多么大的智慧！

孩子，你已经上初中了，马上就成人了，你有认真计算过自己的明天吗？我们的祖先在那样饥寒交迫的自然环境中，用手指计算着时间，用绳结记录着时间，数着数着他们开始数人了，因为他们要一起劳动了；他们开始数东西了，因为他们要分配劳动成果了．数学家罗素说：“当人类发现两天和两只小鸡之间存在某种共同点的时候，人类文明就开启了．”

为了未来的生活变得更加美好，我们必须计算昨天，我们必须规划明天．那么，人类又是如何发现加法的呢？$1+1$在什么情况下等于2呢？

◎ 人类的抽象能力：1 + 1到底等于几

在上文中，我们留下的问题是：1 + 1在什么情况下等于2？对于如此简单的问题，想必你是懒得回答的．是的，对于大多数人而言，“1 + 1 = 2，2 + 3 = 5”就像“谁知盘中餐，粒粒皆辛苦”一样，它只是死记硬背的一个口诀，到需要的时候生搬硬套地使用就可以了．1 + 1 = 2好像就是明摆在那里的，完全没有什么道理好讲．但我要告诉你的是，数学大厦中一切宝贵的知识财富，包括数学皇冠上的明珠，都是从这个最简单的算式中推演出来的．任何一个真正理解什么叫1 + 1 = 2的人，不可能不深爱着数学．

数学家罗素曾经讲过：“人类的一切错误都可以从最简单的数学错误中推导出来．”据说在一个教堂上，教皇对他的这个说法提出了质疑，他说：“罗素先生，听说你认为一切错误都是由数学错误导致的，那么请问你能从2 + 2 = 5这个错误，推导出你罗素先生就是教皇吗？”罗素说道，这有什么困难，请看：

2 + 2 = 5，我们在等式左右两边同时减2，得到2 = 3，

再从等式的两边都减去1，得到1 = 2，

反过来就得到2 = 1．

因为2 = 1，所以说罗素和教皇是两个人，就等于说罗素和教皇是一个人了，罗素当然就是教皇了．

这可不仅是一个笑话，事实的确如此．我们在数学上犯的所有错误，都源于对1 + 1 = 2这个最基本的数学问题认知不清．你认为1 + 1 = 2是任何人都应该懂得的道理吗？那么请问，为什么几百万年前的原始人不懂得这个道理呢？你真懂得1 + 1 = 2吗？那么请尝试回答以下几个问题：

请问，1千克加上1千米等于多少？

听到这里你一定会说，必须是一样的单位才能相加！好的，那么请

问：

1只羊加上1只老鼠等于什么？

听到这里你又会说了，只有同样的事物才能加！好的，那么请问：

1群羊加上1群羊以后，结果为什么仍然是1群羊呢？

那你又会说了，必须是1个1个地数出来才能加！好，请继续回答：

1个人加1个人等于几个人呢？

这下你心里有底了，答案一定是2个人对不对？那我们在实际生活中看看是不是这样吧：我们假设有母女2个人，她们先去医院，然后坐公交车去公园．那么，这一路上陆续会发生这样一些事情：

如果是母女两个人去医院挂号，1个人1元，那么医院会把她们当两个人看，收2元．

出了医院，她们两个乘公交车，1张票1元，但此时女儿的身高不够收费标准，售票员会把她们当1个人看，只收她们1元．

到了公园以后，同样是1个人1元，但因为女儿是学生，可以享受半价，于是她们只需要花1.5元．

怎么样，我们已经看了这么多的例子了，这1＋1它到底等于几？在实际生活中，好像处处都充满了1＋1不等于2的场景．接下来，我们就一起分析一下1＋1＝2中隐藏的秘密．在1＋1＝2当中，同时存在着1、2、＋、＝四个完全不相同的概念．要知道我们必须独立地分析1＋1＝2中的每个概念，才能明白整个算式的含义．

首先我们来看什么叫1.1是人类最难发现的秘密．因为在1＋1＝2这个算式中，前后存在两个1，这意味着要把两个相同的放在一起，才能实现加的结果，但是，世界上有两个完全相同的东西吗？唐诗有云："年年岁岁花相似，岁岁年年人不同．"但是花相似也仅仅是相似，世界上看起来相似的东西很多，但是两个完全相同的东西存在吗？如果你仔细观察，就会发现世界上根本没有任何两片树叶是相同的，甚至同一片树叶

今天的样子和昨天也是不同的．如果世界上的东西必须完全相同才能实现加法，那么就意味着加法没有任何实际用途．自然界中的事物是万紫千红、千奇百怪的，当初我们的祖先生活在原始的丛林里面，他们在采摘和打猎的时候，能采摘到完全相同的水果吗？能够捕猎到完全相同的野兽吗？显然不能！也正是因为找不到完全一样的东西，所以古代人类才在几十万年的时间内迟迟不能发现加法的秘密．

时间在发展，人类在进步，当我们的祖先学会种植和养殖以后，情况就不同了．种植的庄稼虽然每一个颗粒也是不同的，但是由于庄稼是同时成熟的，而且数量庞大，这就会导致我们没有办法去区分每一粒粮食的差别．在这样的情况下，就只能近似地把每一粒粮食看成是相同的．同样，养殖的同一批小羊羔，也可以近似地认为是没有区别的．也只有在这样的条件下，加法的存在才成为可能，人们用加法来计算数量才有实际意义．

当然，人类的智慧不会止步于此，当人类发现了粮食和牲畜的数量可以相加之后，他们逐渐就会发现：世界上的任何两个东西，只要它们的不同可以被忽略，它们的数量就可以相加．换句话说，虽然这个世界上不存在完全相同的两个事物，但是世界上也不存在完全不同的两个事物．如果只关注相同的部分，忽略不同的部分，它们同样也是可以相加的．比如铁和棉花肯定是不同的，但是，如果不看它们的颜色、形状和用途，只看它们的重量，那就是可以相加的．人类从不相同的事物发现共同点的这种能力叫作抽象能力．抽象能力是我们认知世界的基础，如果没有这种抽象能力，人类不但不会发现数学，也不会发展出语言、音乐、文字、绘画等一切人类文明．

世界在不同中蕴含着相同，抽象让我们从一个个特殊的事物中归纳出概念，抽象让我们从一个个独立现象中发现一般规律．人类正是由这些抽象的概念和规律出发，创造出自己的文明的．

以上我们讨论的是$1+1$在什么情况下等于2，答案是，在我们忽略个体差异的条件下，$1+1=2$．那么，$1+1=2$中还隐藏着哪些秘密呢？

◎ 世间万物都是可以计算的

1 + 1为什么等于2？这个问题的关键在于：等号究竟是什么含义？

不知道你有没有仔细观察过小孩子数数的场景？每一个人的成长过程中，都会有这样的阶段．在一个孩子刚学会数数的时候，如果你扔给他一堆积木，让他数清楚有几块，孩子一边数，一边会把数出来的积木摆得整整齐齐的，等他好不容易数清楚了，最后告诉你一共有6块．这时候如果你把他摆好的积木挪动一下，打乱了位置再问他有几块时，孩子就会毫不犹豫地重新数一遍．因为在他看来，积木只要被动过了，数量就可能会产生变化．其实这并不是因为小孩子幼稚，古人也是这样认识世界的．因为这个世界无时无刻不在运动变化中，既然这些物体的位置发生了明显的变化，我怎么知道它们的数量有没有变呢？所以，肯定得重新数一遍才能确定．

在这种情况下，一般的家长都会直接教给孩子：“你不用再数了，你刚才不是已经数过了吗？如果只改变积木的位置，积木的数量是不会变的．”但其实大可不必，你只要让孩子多数几次，随着他数的次数越来越多，他逐渐就会意识到，只要不增不减，无论形状、位置发生怎样的变化，物体的数量总是不变的．我们都知道，这个世界每时每刻都在发生着运动变化，完全静止不变的东西，事实上是不存在的．但是，正如相同和不同的矛盾一样，变化和不变也并非绝对的，在运动之中，总有相对静止的物体；在变化之中，总有相对不变的规律．变化中蕴含着不变，这就是数学带给我们的认识世界的第二把利器．数数这么简单的动作背后隐藏的是认知这个世界的深刻哲理．那么，在1 + 1 = 2这个算式中隐藏了哪些不变呢？

首先，是数量的不变．假想你打开冰箱发现了一个苹果，这时你的朋友又把另一个苹果放到了冰箱里，那么，在一定的时期内，你不需要打开冰箱就知道，冰箱里有两个苹果．注意，此时，你不知道的是：两个苹果摆在哪个格子里了，摆放的方向是怎样的；是摆在一起了，还是分开摆放了．这些你都不知道，但你一定清楚地知道，冰箱里有两个苹果．但是这个认知是有时间限制的，如果到了一个月以后，你一定不会

简单地认为冰箱里还有两个苹果了，因为它们可能被吃掉了，也可能已经腐烂了．在一定条件下，数量保持相对的不变，这是加法中隐藏的第一个规律．

其次，是结果的不变．1个苹果加1个苹果等于2个苹果，这个结果和我们看到苹果的顺序无关，相加的两个数字，无论出现的顺序如何变化，谁先出现，谁后出现，结果都是一样的．假设苹果再多几个，你还会发现，你会有很多种数苹果的方法，从这些方法中，就可以得到各种不同的算式：2 + 6等于8，3 + 5也等于8．这就是说，同样的结果，是可以由不同过程得到的．

最后，是规律的不变．1个苹果加1个苹果等于2个苹果，1个人加1个人等于2个人，1天加1天等于2天，1米加1米等于2米．在无穷无尽的具体问题中隐藏着不变的规律．因此，1 + 1 = 2这个规律一旦被发现，就和具体的问题脱离开来了，数学也因此成为一门独立的学科．独立于物的计算，独立于人的计算，独立于时间和空间的计算．也正因为如此，数学才能构成一切知识的基础．

然而，1 + 1 = 2中隐藏的秘密不止这些，让我们再整体地看一下1 + 1 = 2这个算式，算式的左侧是一个相加的过程，右侧是一个计算的结果．整个算式说明，如果我们知道了所有事件发生的过程，知道了过程中的规律，就可以准确无误地得到结果．知道过程就可以知道结果，这说明了这个世界是可知的．在此之前，我们的祖先都认为这个世界的各个部分是由各种神秘莫测的神灵主宰的．出现任何奇怪的现象，都可以解释为这是某个神的意愿：发生了一件好事，就认为某个大神高兴了；发生了某件坏事，就认为是哪个大神生气了．但1 + 1 = 2确切无疑地告诉我们，无论有没有神，无论神高兴不高兴，1 + 1永远等于2，不会等于3．就这样，数学让我们摆脱了愚昧，走向未来．

从1 + 1 = 2出发，人类构建了所有的数字和加法；从加法出发，人类发现了减法．如果说加法让人类能够通过过程预知结果，那么减法的意义就在于让我们通过结果来分析过程．后来，由于加法用得多了，要相加的数量多了，在重复的加法运算中，人类又发现了乘法．虽然乘法只不过是加法的一种简便运算，但乘法的出现还是让我们统计大量的物

品的速度大大提升了．从乘法继续前进，人类又发现了除法，这样就能够把劳动成果快速分配下去．

自从发现了加减乘除之后，人类智慧的大门就被打开了：我们既可以从不同的事物中发现相同的概念，又能从变化的事物中发现不变的规律；我们能够通过过程计算得到结果，还能从结果中反推得到过程；我们能够实现快速的统计，又能实现随意的切分．好像这个世界已经毫无秘密可言了．真的是这样的吗？当你小学毕业学会了加减乘除以后，你有没有想过，自己还有哪些不会的知识呢，在初中阶段数学又需要学些什么内容呢？

(1) 编者注：这个故事出自《庄子·天道》，后人用成语“轮扁斫轮”来概括它．本书中作者用较通俗的语言对这个故事进行了阐释．

(2) 编者注：“小李子”是观众对李昂纳多的昵称．

二　初中数学学什么

◎ 对变化的数进行计算：怎样才能赚到最多的钱

我小学毕业的时候，数学成绩非常好．我认为初中数学要学习的内容是：五位数的乘除法，五边形的面积，五棱柱的体积．为什么我会这么认为呢？因为小学只学过三位数、四位数的乘除法，三角形和四边形的面积计算，我自然就会想到初中的时候会更进一步．这样的问题想一下就让人感觉无聊，毫无学习的动力．这就好像新出的一款手机，没有任何新功能，只不过是屏幕大了一点，这样的结果的确让人失望．不过你要记住了，未来从来就不是历史的简单延续！

要知道初中数学学习什么，首先要对所有小学的内容进行一个总结回顾．小学学习了整数、小数、分数，加减乘除四则运算，计算图形的周长和面积．这些内容用一句话总结，就是运用一些确定的数字，经过确定的计算方法，找到确定的答案．

比如：小明有1个苹果，妈妈又给他买了1个苹果，小明一共有几个苹果？计算的意义只能让我们做到心里有数，起不到其他的作用，比如这个苹果问题，无论我们是否计算，都不会导致我们多出来一个苹果，或者少一个苹果．正是因为这个原因，所以在日常生活中，大部分情况下都不会计算，比如很多自己开店的小老板，除了有赊欠之外，就很少有人记账．

进入初中阶段以后，情况就不同了，需要计算的是每时每刻都在变化的数量间的关系．如果我们把确定性的数字叫作常量，那些暂时不确定，但是可以通过计算得出的数量，就叫作变量．为什么要计算变量呢？因为在工作生活中，大多数的数量都是不确定的，只能知道这些数量之间的相互关系，却不知道这些数量具体是多少．世界上变化中总蕴含着不变，有时候，我们会在不断变化的数量中，找到不变的数字或者不变的规律；有时候，我们会在变化的量中找到最有利的量．

举一个实际例子：假如你是一家小店的老板，对你而言，最有利的事情就是赚到更多的钱．但是每天能赚到的钱数根本不由你控制，它是由每一件商品赚的钱乘以客户购买这些商品的数量来决定的，而每天来的客户数也不受你控制．虽然客户数和总的利润不由你说了算，但是，商品的价格是由你说了算的．一般来说，商品卖得越便宜，客户来得就越多；商品卖得越贵，客户来得就越少．也就是说，客户数量由商品价格决定，而总利润又由商品价格和客户数决定，所以就可以认为总利润也是由商品价格决定的．是不是商品卖得越便宜赚钱越多呢？显然不是，假设每件商品的利润都为0，那么无论有多少客人来，都赚不到一分钱．同样，假如把商品的价格定得过高，虽然单件商品的利润有了，但是如果没有客户来买货，同样赚不到钱．怎样才能赚到最多的钱呢？

这个就是初中数学所要解决的问题之一．小学数学可以让我们认识世界，但初中数学却可以让我们改变世界．要计算确定的数字，直接使用数字和加减乘除就可以了．但我们要计算变化的数字，就不能直接使用1、2、3、4、5这些数字了，我们就需要使用a、b、c 或x、y 这样的字母来表示一个尚不确定的数字．因为我们要使用字母代替数字，所以这样的数学也叫作代数．代数会带给我们一种全新的思维方式，它让我们拥有了改变世界的能力．我们通过代数学掌握了变化的数量的规律，就可以通过改变那些我们能控制的变量，对其他的变量施加影响，这样就能轻松地驾驭那些每时每刻都在变化的数量，达到改变世界的目的．

我们生活的这个世界每时每刻都在运动变化之中，我们也无时无刻不在驾驭变化：在骑自行车的时候，车子的速度、方向、角度、位置每时每刻都在发生变化，但是我们却能轻松地驾驭，不但能让车子不倒，而且能以最快的路径、最轻松的姿态到达目的地．掌握了初中数学，我们就能够像骑车一样，轻松应对这个不断变化着的世界，使它逐步发展成我们所期望的样子．

柏拉图说："我们在大自然的真理面前，不过是井底之蛙，我们通过自己的眼睛看到的大千世界，都只不过是真理通过井口投在井底的影子而已．"而每一个人生存的目的，就是为了通过分析这些影子，来发现大自然的真相．我不知道，世界是不是柏拉图所说的样子，但我唯一知道的是，如果世界真的是这个样子的话，那么数学就是大自然留下的最为

清晰、最为深刻的影子！

对人类而言，最宝贵的是生命，最宝贵的是时间．那么，世界上第二珍贵的东西是什么呢？

◎ 世界上第二宝贵的东西：空间

要说这世界第一，那是万众瞩目的，所以世界第一是什么的问题，往往很容易回答．可是这世界第二就惨了，大多数人都没什么印象．你知道世界第二个登上月球的人吗？你知道世界上第二的哲学家吗？你知道世界第二高的山峰吗？好像这世界第二根本就没那么重要，知不知道无所谓，甚至有没有这个第二都无所谓．我们今天要讨论的世界第二，那可绝不是可有可无的，毕竟在我们每个人的一生中，不能除了最宝贵的时间之外，一无所有吧．这个世界第二宝贵的东西，它到底是什么呢？我们接下来慢慢地来分析．

有人说：世界上最宝贵的是土地，因为人类的吃穿用度，大部分是土地上生长出来的，而且世界上绝大多数的战争都是为了争夺土地，包括现在的亿万富翁们，都要到处去买房圈地，他们一圈地可不得了，搞得房价疯涨，我们普通人挣一辈子钱都买不上一套自己的房子．如果土地不宝贵的话，为什么有这么多的人为之奋斗啊？这个说法的确很有道理．

又有人说：不对，土地这个说法太宽泛了，土地的质量也是有区别的，世界上有很多贫瘠的土地是没人要的，依我看世界上最宝贵的是道路：你看那些金融大鳄，一买就是一条商业街，那商业街的用地，可是比居住的楼房贵多了．而且，那些贫困的地方，只要把路修好了，交通发达了，用不了多久，它们也会脱贫致富的．现代的社会，最重要的事情就是发展经济，而发展经济最重要的是发展商业，发展商业最重要的就是交通．看起来这个说法也是很有道理的．

还有人说：不对，依我看，现在世界上最重要的是港口，你看看全球最发达的那些城市，都是临海临河的港口城市，因为这些地方是水陆空交通的枢纽，世界上所有的商品都要从这里经过，甚至全球的金融中心也都建立在港口城市．当然，这是现在，如果是古代的话，世界上最重要的就是关卡，什么阳关、散关、嘉峪关、潼关、居庸关、山海关，它们不但是经济和交通的要道，而且是军事要塞，古代一场战争牺牲几十万人的生命，不就是为了夺下一个关口吗？为什么要夺这个关口？不

就是这里地形险要，一夫当关、万夫莫开吗？这不就证明，关口或者港口才是最宝贵的吗？这个说法看来也振振有词啊，看来这最宝贵的确实就是关口了．

这时候，前面的朋友又发话了：不对！一个独立的关口有什么用？没有后方大片的土地给你供应粮食，就算有再多的士兵，这孤零零的关口你守得住吗？再说，你争夺关口的目的，不就是保护国家的领土吗？关口如果和土地相比，就好像房门上的铁锁对比房子里的黄金，难道铁锁比黄金还贵吗？说到这儿啊，前面说道路宝贵的朋友又站起来了：不对，不对……

听到这里，我是彻底晕了．说来说去，土地、道路、关口整个都转了一圈了．那么这世界上第二宝贵的东西到底是什么呢？我们一起来梳理一下：土地重要是因为供给我们粮食，道路重要是因为可以发展经济、保障交通，关口重要是因为那是交通咽喉．这些东西都很重要啊，那怎么办？别忘了，数学最重要的最基本的能力是什么呢？抽象！抽象可以让我们把看起来不一样的东西，抽象出共同的特点，抽象出一样的概念．如果我们把世界抽象成一张地图，那么关口不就是地图上的一个点吗？道路不就是地图上的一条线吗？而土地不就是地图上的一部分面积吗？我们把点、线、面再高度抽象一下，总结出一个词语来，那就是空间！

是的，空间是和时间相对的一个非常重要的基本概念，对于人类而言最重要的是时间和生命．生命的价值在于运动，而运动就既需要时间，又需要空间．古代的庄子曾经说过：一个轮子无论多么精美，如果没有轮轴中间的空隙，那么轮子就无法运转，轮子就毫无价值．一个宫殿无论多么庄严华贵，如果宫殿内部都填得满满的，没有人的容身之地，宫殿也就毫无用处．因此，对于整个人类而言，世界第二宝贵的东西就是空间．空间让我们有了自己的容身之地，空间让我们有了运动的场所，空间把整个大千世界展现在我们面前，空间让我们改造世界成为可能．

我们要认识世界，改造世界，不可能只关注时间的先后，不关注空间的广延．时间有长短，空间有远近，时间有过去未来，空间有上下四

方；描述时间可以用数字，描述空间就需要用点、线、面、体；计算时间可以通过加减乘除，计算空间就需要旋转、翻转、平移．

人类很早就意识到了土地的宝贵，我们的祖先在公元前3000年以前就开始了对空间的研究，到公元前300年左右，有一位集大成的数学家欧几里得，把所有研究空间的学问搜集整理到一部书里，构建起了一套严密的逻辑体系，这就是人类科学史上最伟大的著作——《几何原本》；2000年以后，英国的一个年轻人从《几何原本》出发，认识到了宇宙中所有物体运动变化的规律，整理出了近代科学的奠基之作——《自然哲学的数学原理》．他就是大名鼎鼎的艾萨克·牛顿！

同时，笛卡尔、费马、伯努利等数学家陆续发现了解析几何，它可以通过坐标系把时间和空间放到一起，把数字和图形整合起来．把空间放在时间上，就会观察到静止的物体产生了运动变化；把时间放在空间上，就会发现运动的物体能够变成静止的图形．所谓认识世界，不就是要了解世界上的所有事物在时间和空间上的变化规律吗？

数学像一条奔流的大河一样，流淌了3000年以后，逐渐分成了代数和几何两个支流，再继续流淌了2000年左右，又重新汇集到了一起．整个初中数学，就是要共同经历我们祖先发现发明的奇妙历程，共同见证那些伟大而光辉的时刻．那么代数、几何和解析几何有哪些具体用处呢[1]？

◎ 想要打仗，需要你懂几何、代数和解析几何

最近这几年，电视上播放了不少抗日“神剧”，什么“手撕鬼子”“手榴弹炸飞机”之类的荒诞情节屡见不鲜．这些年轻的“神剧”导演们完全没有战争经历，不懂得战争的残酷，设计出的故事情节自然荒诞不经．

这些抗日“神剧”之所以害人，还不仅仅是因为情节设计得荒唐，关键在于，你看完这样的电视剧就会感觉，在打仗的时候，我们只要有一腔热血，只要有奋不顾身的精神，那就一定会打胜仗．什么正义永远会战胜邪恶，什么狭路相逢勇者胜，讲的也都是这个道理．真的是这样的吗？当然不是了！如果狭路相逢勇者胜，那么关天培、邓世昌这些民族英雄就不会白白牺牲了．在甲午海战的时候，北洋舰队全军覆没，而日本的军舰一艘都没有被击沉，难道有这样惨痛的历史教训还不够吗？真的打起仗来，只有爱国热情和牺牲精神，没有科技实力和经济实力作保障，那能行吗？

我们不妨从战争场面里挑选一个场景来分析．假设我们回到了战争年代，得知了有敌人要来附近的饭馆吃饭，怎么样才能一炮就把敌人干趴下呢？你一定会说：那还不简单，只要找个隐蔽的地方，把炮架起来，等敌人来的时候，对准他们放一炮不就完事儿了吗？那些抗日“神剧”里面，还真就是这么安排的，一炮下去，敌人就上天了．然而你想过没有，开炮之前怎么瞄准呢？要知道炮弹打出来以后，走的可是一条曲线．要想让炮弹打中敌人，就必须知道这个炮弹要飞多高、飞多远，再根据距离和高度，调整炮弹的发射角度．问题是，这些东西我们都不知道！怎么办？那你可能就会想到：咱先找个地儿打两炮试试．我觉得这个想法可行，那我们就仔细研究一下这个方案吧．

我们可以把炮打敌人的计划分成五个步骤：第一步，找到附近最合适的隐蔽地点；第二步，准确测量出发射点到敌人饭桌的距离，包括水平的距离和垂直的高度；第三步，找个空旷的地方试射，把炮架子先弄到野外去，按照事先测量好的距离，把发射点和饭桌的位置标记出来，而后开始射击实验；第四步，不断调整炮弹的发射角度，反复进行射击

试验，直到炮弹精准地落到饭桌上，就可以把正确的发射角度记下来；第五步，把炮架子偷偷运到发射点，把方向和角度都按照刚才试验的角度调整好，等待敌人出现就开炮．怎么样？我们这个方案设计得还算合理，好像没有什么问题，那我们就开始实施．

这隐蔽点很快就被我们找到了，就在某一座钟楼上．但是现在的问题来了，要测量发射点到饭馆里具体某个饭桌的距离，我们应该怎么测量呢？这两者之间的距离有三五百米，而且两个楼之间还是斜对角的，我们不可能在两个楼之间拉一根皮尺，那怎么办？这时候就需要用到几何知识了，如果你懂得了几何图形的相似原理和勾股定理，你只需要把两条街道的垂直距离测量出来，再计算一下就行了．那街道距离又要怎么测量呢？这时候我们就需要用到一根长长的竹竿和几根细线，把竹竿立起来，牵动细线分别对准发射点、饭桌和街头拐角之间的位置，就能够迅速搭建起一个缩小了的模型，然后再测量出竹竿的长度，按照对应的比例放大一下就可以计算出两者之间的距离了．不过，如果你没有扎实的几何知识，那这一步计划就要落空了．

接下来，我们需要在野外找个地方来试射，这个野外的地点，同样需要竹竿和细绳来帮助我们把缩小的模型放大到真实的环境中．地方好不容易搭建起来，更大的麻烦又来了．我们总共只有三发炮弹，刚才试验射击用了一发炮弹，这第一发没打中目标，现在手里只有两发炮弹了．我们的确可以接着打第二发炮弹，但是如果这第二发也没有打中目标，我们接下来怎么办呢？第三发炮弹究竟要怎么发射呢？在这种情况下，代数知识就要起作用了，因为弹道曲线是有现成的公式可以套用的，我们只要把第一颗炮弹发射的角度和炮弹落地的距离都代入轨道方程中，很快就能得到炮弹的初始速度，再把初始速度和落地的距离代入轨道方程，就可以知道炮弹发射的正确角度．但是这样的速度只是理论计算，我们还需要按照这个角度试射第二发炮弹，这发炮弹极有可能还是打不准，但是不要紧，我们继续测量出它的落地距离，就能进一步把炮弹受到的空气阻力计算出来．最后再把这个阻力系数代入方程，就可以精确地知道第三发炮弹的发射角度了．

我们的任务完成了，可是你有没有想到，如果我们忘记了炮弹的轨道方程，那怎么办呢？那就只有多打几颗炮弹了．在这种情况下，我们

打炮的目标不是为了瞄准目标，而是为了重新发现轨道方程．可以把炮弹的发射角度分别设置成30°、40°、50°、60°，然后再分别测量出炮弹的落地距离；最后，我们用炮弹的发射角度和对应的落地距离画在一个平面直角坐标系上，再把这几组角度和距离的数字描点连线，就可以得到炮弹的运动规律，求出轨道方程．前面通过轨道方程求解发射距离用到的知识属于代数；反过来，现在这种通过几组数据来求得轨道方程的方法就叫作解析几何．

以上，我们通过一个游戏，把几何、代数和解析几何的用途做了一个简单的介绍．在我们现在举的这个例子当中，我们自己手里既有情报，又有大炮，可是如果不懂初中数学还是干不掉敌人．可见数学知识实在是太重要了，如果不懂得数学，只有一腔热血的爱国热情，到了战场上可是要白白牺牲的．希望你一定从抗日“神剧”的梦幻中醒过来，扎扎实实地学一些真正的本领，只有这样才是真正的爱国．

前面简单介绍了数学的历史、用途和初中数学要学习的内容．从下章开始，我们就要学习具体的数学知识了．在正式开始课程前，我们还是要留下一个问题：话说1500年前的某一天，天空阴云密布，罗马教皇下令对一位数学家使用了酷刑，把他的十个手指夹残废了，而罪名仅仅是因为一个数字的使用，这个让人流血的数字到底是什么呢？

(1) 编者注：本书中作者将几何和解析几何区分开来进行讲解．

三　数系的扩充

◎ 流血的数字：0中隐藏的秘密

原来，它就是我们常用的数字0．我们日常使用的1、2、3、4这些数字，被称作阿拉伯数字．所谓阿拉伯数字，也不是阿拉伯人发明的，而是印度人发明的，只不过后来是被阿拉伯人传到了欧洲，才逐渐在全世界范围内流行起来的．那么，在阿拉伯数字使用之前呢？各个国家和地区都有自己的数字，比如中国就用一横、两横、三横分别表示一、二、三，而欧洲常用的数字就是罗马数字，他们用一竖、两竖、三竖来表示一、二、三．但是问题在于：无论是中国数字还是印度数字里面，很早就有了0，但是罗马数字呢？从来就没有0的概念．他们把“0”称作魔鬼数字，说它是魔鬼撒旦发明的．所以你就明白，那位数学家为什么会因为数字0被夹断手指了．

不过，既然数字0很重要，为什么罗马人没有早一点发现0呢？为什么教皇不惩罚使用数字1、2、3的人呢？同时，我要告诉你的是，在我们中国早期的时候，虽然我们使用0，但是我们并不把0通过文字写出来，而是用一个空白位置代替0，用一个圆圈代表0是很晚的时候才出现的．接下来我们就讨论一下，0的存在有意义吗．

你可能会说：0存在有意义啊，比如老师出了道题1－1等于几？我一看，结果是0，于是我就什么都不写了，那老师非骂我一顿不可．我不写的话，老师怎么知道我的作业做没做．可是你再仔细想想：如果世界上没有0，老师根本就不会给你出1－1等于几的问题了．这时候，你可能又会想到：这不仅仅是一道数学题，平时自己记账可能遇到钱花光的时候，这时候就只能写上一个数字0；如果什么都不写，这账就没法记了．可是你再想想，也不一定没法记啊，你可以写一个汉字“无”．那你可能会继续反驳我说：“0”这个字写起来比“无”更简单．可是你要知道，在汉字中，比“无”复杂的字有很多，比如常用的“你”“我”“他”，笔画都很多，如果把“无”字写成“0”字也算有意义的话，那些更常用、更复杂的文字早就应该简化了，根本就轮不到去简化“无”这个字．而且我们更要知道的是，世界上哪里会有完全没有用处的东西呢？无论看起来多

么蠢笨的东西，只要我们仔细找，总能发现一点点的用处；反过来说，如果任何一个有点用的东西都要保留的话，这个世界上早就被垃圾填满了，一个东西要想被人接受，不仅仅要有用，而且用处要大于它带来的麻烦才可以．接下来让我们通过几个问题看看0带来的麻烦．

第一题：我原来有3个苹果，又买了0个，现在有几个苹果？答案是$3+0=3$对不对？第二题：我要把苹果分给0个小朋友，每个小朋友分3个苹果，一共需要几个苹果？也很简单$3\times 0=0$．第三题：我手里有3个苹果，要全部分给0个小朋友，平均每个小朋友分几个？因为在这个题目里面0要做除数了，所以结果没有意义．那么，这个问题就有点奇怪了，如果0表示没有的话，$3+0$相当于不用加，不用加结果还应该等于3；但是3×0不也相当于不用乘吗？为什么不用加等于3，不用乘的结果却是0呢？更奇怪的事情还在后面呢，3×0和$3\div 0$都是在处理分苹果的问题，为什么3×0就等于0，而$3\div 0$就变得没有意义了呢？$3\div 0$为什么不能等于0呢？

现在我们要用细致入微的手法，为你揭开0的秘密，要知道0中隐藏的秘密远远比$1+1=2$大得多．那么，一个知识点存在的意义是什么？也就是说，评价一个知识点有没有意义的标准是什么？

评价知识有没有意义，至少要考虑三到五个方面的问题：第一，这个知识点在理论上存在的意义是什么？就是说这个知识点是怎么推导计算出来的，或者它是如何归纳总结出来的；第二，这个知识点在实际生活中有没有具体的用途；第三，这个知识点和现有知识是不是相容的？也就是新知识和所有旧知识之间有没有相互的矛盾冲突，是否能够解释和包容旧的知识；第四，这个知识点是否能够解释某些历史的遗留问题；第五，这个知识点能够对人类的未来产生哪些帮助．在最理想的条件下：一个新的知识点，必须连接理论和实际，必须面向历史与未来，同时必须能够和旧有的知识融洽地相处．但有时候，这五点不能全部满足，那么它至少也要满足其中最重要的三点：第一，从理论中产生；第二，解决实际问题；第三，面向未来．新的知识有可能暂时和旧有的知识产生矛盾，有可能暂时解决不了部分历史遗留问题，也有可能产生一些新的问题，这些问题可以留待以后解决．只要是面向未来，能够给我们带来实际好处的，也可以暂时接纳它．

刚才总结了评价一个新知识点是否有存在意义的五个标准，希望你在学习任何新知识的时候，按照这五个标准进行缜密的思考和鉴别，因为只有这样才能得到真知，只有这样掌握的知识才更加扎实、牢靠．现在，按照这个标准判断一下0的存在有没有意义：

首先，任何数字减去它自身都可以等于0，因此0在理论上有实际意义；其次，0可以解决在钱花完了的条件下的记账问题，有实际用途；然而，0在处理加减乘除的时候，不能妥善地处理，尤其是0作为除数，产生了没有任何意义的结果，可见0和旧有的知识之间是有矛盾的；最后，0能解决什么历史问题吗？不能！历史上早就有了1、2、3，历史上没有0的时候我们也没有遇到什么麻烦．那么，0能够解决未来的问题吗？这一点也是未知的，在以后记账的时候我们可以写0，但是也可以用文字来代替0．经过这些分析可以发现，0的存在只能满足其中的两个半条件：即0的存在有理论价值和实用价值．然而，0的存在与我们已知的除法产生了矛盾．所以，我认为：在1500年前的那个历史条件下，0的存在是可有可无的，它的存在没有必然意义，它的存在更不会推动人类文明的发展．

结论居然是0的存在可有可无！别着急，这个结论是有前提的，1500年前的0是可有可无的，并不是说现在的0没有意义．也就在1500年前，就在欧洲人争论0的存在有没有意义的时候，一种比0更奇怪的数字开始流行起来了．它的出现，不仅让商人的赚钱速度增加了10倍，更是推动了整个人类文明的发展，同时，也让0这个数字的存在成为必然．

◎ 赚钱的数字：负数的存在

随着人类历史的发展，有一些比0更不可思议的数字开始在欧洲流行起来了，它们是一些比0还小的数字，被称作负数．要知道，0的存在就已经很让人抓狂了，怎么会有比0还小的数字呢？是什么人非要使用这样的数字呢？商人！那他们使用负数有什么好处呢？赚钱！负数为什么会让商人多赚钱呢？要想知道这一点，我们首先就要弄明白，商人是怎么赚钱的．

商人就是靠倒卖东西赚钱的人，他们以便宜的价格把货物从产地或其他地方买进来，再以较贵的价格在市场上卖出去，从中赚取差价．一个商人要想赚钱，首先必须要拥有一笔启动资金，用这笔钱买来货物，然后再卖出去才能赚钱．假设一开始这个商人只有10万元，买进10万元的货物，如果货物卖出以后能收入15万元，他买卖一次货物就能赚5万元钱．我们再假设他买卖一次货物需要1个月的时间，这就意味着他1个月的时间就能把10万元变成15万元，让自己的资产增长50%．如果他一开始就有100万元呢？他就可以一次进100万元的货物，而1个月后，他的资产增长50%，就会变成150万元．换句话说，商人赚钱的多少，是受他的初始资本控制的，越是有钱的商人，赚钱越快．可是这跟负数有什么关系？

刚才都是理论分析，如果你去市场上观察就会发现：商人能进的货，远远比他手里的现金要多，一个手里只有10万元现金的商人，就能做着100万元的生意．为什么？因为他在这个市场上经营的时间长了，跟客户和供货商的关系特别好，彼此之间产生了信任关系，因此大多数生意都是在相互赊欠的情况下完成的．虽然商人手里只有10万元现金，但是他还有很多客户，他们欠着他80万元的账款；同时，仓库中还有10万元的货物．在这种情况下，商人就可以毫不费力地从进货商那里再赊来90万元的货物，等他把货物卖出去，把钱赚到手以后再还给他们．在一个稳定成熟的市场上，商人之间比拼的不仅是谁手中的现金多，更是谁的信用更好，信用多的人就能够赊欠更多的货款，生意就能做得更大．一个毫无信誉的人，手里有20万元现金，他就只能做20万元的生

意；而一个信誉良好的人，手里有10万元现金，却可以做100万元的买卖．那么，欠债经营是不是临时的呢？一个商人如果靠着欠债赚回100万元了，他是不是就可以不用欠别人的钱了呢？不是的，如果他有100万元现金，他就有资格欠别人1000万元了，他也就可以开始做1000万元的生意了．

从上面的分析中可以看到，债务是一个商人信用的表现，依靠债务，商人可以扩大自己的生意规模，让自己多赚10倍的利润，欠债在商业活动中是一种常见的现象．那么，如何在账面上同时体现出来现金和负债呢？有人说，我可以通过欠款两个字来表示，也有人说，我可以用不同颜色表示，比如用黑色的字表示收入，红色的字来表示负债．这些办法当然可以，但是，更为简便的办法是直接使用负数．负数是比0还小的数，与正数的含义相反．就在商人们开始大量地使用负数的时候，在一些数学家的笔下，负数也出现了．

加法是具有交换律的，比如3＋5的结果和5＋3的结果是一样的，这一点在人类发现加法的时候，就已经知道了，因为加法代表的就是两个数的和，而相加的结果与两个数字出现的顺序是无关的．但是，与加法相反的减法显然是不符合交换律的，5－3和3－5有着本质的区别．但是，如果你的算式中多了一个数字，比如，7－3＋2，无论是先－3，还是先＋2，结果总是不变的，7－3＋2＝6，7＋2－3也等于6．这样的算式可以有无限多个、可以无限长，只要你不把减号后面的数挪到第一个数字的位置，无论怎么移动后面加减的数字，最终的得数总是不变的．为什么减法有时候可以交换，有时候不能交换呢？为什么第一位的数字就这么特殊呢？其实不只是第一个位置特殊，人们发现：类似2＋5－3这样的算式也是特殊的，它的结果等于4，但－3却不可以随便地移动，如果你把－3移动到中间，变成了2－3＋5，前面的2－3也就没有意义了．这个矛盾引发了一些数学家的思考，大家普遍认为，如果规定小数减去大数等于一个负数，这个算式自然就有意义了，比如规定2－3＝－1，那么－1＋5就等于5－1，结果同样是等于4．于是，负数就作为一种临时运算的中间结果被保留了下来．值得注意的是，虽然负数的实际应用早就产生了，但是几乎所有的数学家都坚持认为负数是没有任何实际意义的，它只是一种为了运算方便而增加的临时概念．这种观点一直延

续到近代，在笛卡尔建立坐标系的时候，还是把负数当假数，甚至连18世纪的欧拉也对这一点深信不疑，一直到了19世纪，摩尔根等人还说：负数的存在是“十分荒谬”的．

是什么原因让大家普遍接受了负数呢？其实，是一种全新的世界观．过去，我们之所以认为最小的数字是0，那是因为我们认为这个世界上，一切跟数字相关的量都是有起点和终点的．比如人的年龄既不可能小于0，又不可能无限大．同时，任何一方土地，无论多么广阔，都是有边界的，如果我们设定一块土地的最左侧表示0，那么从左到右测量下去，总会有一个数字表示土地的长度和宽度．但是，随着人类对整个宇宙的认识不断深入，人类的视野逐渐开阔，我们总是能发现距离更加遥远的星系，在这个过程中，人类逐渐感受到，整个宇宙空间似乎是没有边界的，与之对应的时间似乎也是没有起点、没有终点的．像时间和空间这样没有起点的量，我们就没有办法用0表示它诞生的时刻，或者它开始的地方．因此，只能从中取一个表示0的点，而后用正数和负数分别表示两个不同方向的量．比如，用0年表示公元纪年的开始，在此之后的年份就用正数表示，而在此之前的年份用负数表示．再比如，地球的经度，也只能人为约定格林尼治天文台的经度为0度，人们若用正数表示向东，那么向西就用负数表示．另外，一开始我们认为，像温度这样的量，也是没有最小值的，因此，我们就约定水结冰的温度为0摄氏度，高于0摄氏度的用正数表示，低于0摄氏度的用负数表示．尽管后来我们发现温度是存在最小值的，它的最小值被称为绝对零度，然而由于绝对零度的环境太不常见了，所以我们还是保持了原来的习惯．

这样一来，负数的存在就有了与之对应的实际含义，负数的概念就被世人广泛接受了．接下来用我们的价值评测体系来判断一下负数存在的意义：第一，负数是在数学计算中出现的，它具有理论价值；第二，负数在空间、时间、温度等量的计量之中广泛应用，它有实际用途；第三，负数不但解决了历史上记账的问题，而且让商人更赚钱了，有历史意义；第四，负数让人类的视野更加开阔，促进了人类科技的迅猛发展，对开拓未来也有着非常重要的意义．正因为上述这些意义的存在，人们逐渐接受了负数的概念，同时，对负数的接受也使得世人被迫承认了0的存在是有意义的，正数、负数和0统称有理数，自此，数学的两扇

大门全部开启，人类进入了全新时代．

但是，负数与我们已知的正数的加减乘除法则相容吗？是不是又会像数字0一样，出现类似“0不能做除数”的矛盾呢？

◎ 为什么负负得正：负数的加减法

自从有了负数，人类对数学的认识就进入了有理数的时代．同时，负数也曾经让数学家们头疼不已，那么是不是负数中出现了什么不可调和的矛盾呢？接下来，我们就来分析一下负数的加减运算：

首先，我们看一下负数最基本的运算，也就是负数是怎么得到的？很简单，如果我们用一个小数减去一个大数，就得到一个负数，比如1－2＝－1，3－5＝－2．总结规律就是：遇到小数减大数的问题时，就计算出大数减去小数的差，最后在这个差的前面填写一个负号．这个负号长得和减号一模一样．这个规则很简单，也没有什么矛盾．那么我们再看看，如果一个正数加一个负数，结果会怎么样呢？

比如3＋（－2）．我们都知道，如果是3＋2，那结果肯定是等于5了，如果3＋0就等于3，可是这－2是比0还要小的数字，那加起来肯定就越加越少了．因此3＋（－2）就等于在3的基础上再减少2，结果等于1．换句话说，加上一个负数等于减去一个正数．这个看起来就有点诡异了，这加法应该是求和，结果应该是越加越多才对，怎么会越加越少呢？不过想想，谁让人家是负数呢？这也就勉强接受吧．然而接下来的问题就惨了，如果我们减去一个负数会怎么样呢？

比如3－（－2）．首先，参考一下正数之间的减法，如果是3－2，那肯定越减越少，结果等于1；如果是3－0呢？结果还等于3；如果减去一个比0还小的数怎么办？好办，参考一下上文中的加法算式，在上文中计算3＋（－2）的过程中，明明是加法，结果却变小了；现在我们要处理的是减法，与之对应的，结果就应该变大了．3－（－2），相当于在3的基础上增加2，结果就等于5了．这下你该明白了吧，为什么有那么多的数学家不允许负数存在，这负数实在是太诡异了，居然负负可以得正，简直是岂有此理．据说，法国昆虫学家法布尔就是因为搞不懂负负得正，所以才讨厌数学的．

负数不是经常用来比作债务吗？比如你现在有5元，同时还欠着别人2元的债务，这样也就相当于你一共只有3元．这时候债主说，由于你

在生活中帮了他一个大忙，所以债务一笔勾销了，也就是说你在只有3元资产的情况下，减去了2元的债务，你手里的5元现金就都是你自己的了．这就是3－（－2）＝3＋2＝5的实际意义．再举个例子，正负数不是相反的量吗？如果把正数比作好人，负数肯定就是坏人了．如果在我们的队伍中减去两个坏人，是不是相当于增加了两个好人呢？

通过前面的讨论我们发现：在学习了负数以后，加减法的概念发生了变化，在学习负数之前，我们认为加的含义就是变多，减的含义就是变少；但负数的出现，彻底改变了这种认知．如果在有理数的范围内做加减法运算，虽然表面上是在做加法，但如果加的是负数，结果就会变小；虽然做的是减法，但如果减的是负数，结果就会变大．在这种情况下，什么是加法？什么是减法呢？另外，这个正负号和加减号长得一模一样，它们有什么不同吗？

可以通过一个形象的例子去体会．仍然以做买卖为例：用卖货表示加法，用与之相反的退货表示减法．那么，正负数怎么理解呢？如果我们卖出去的货赚钱了，就是正数；如果卖出去的货赔钱了，就是负数．接下来，我们举几个例子来感受一下，正确的算式应该如何表达？

假设开始有3元钱，我们卖出了一件货赚了2元，用算式怎么表达呢？卖货是加法，赚钱是正的，那就应该是3＋（＋2），在代数学里边，正号可以忽略不写，于是结果就是3＋2＝5．相反如果我们卖了一件货，赔了2元怎么表达呢？由于卖货要用加法，赔钱要用负数表达，所以正确的表达方式就是3＋（－2）＝1．下面我们继续尝试：有人退了一件货，这件货当初我是赔了1元钱卖出去的，由于退货要用减法，赔钱要用负数表达．所以正确的算式就是3－（－1）＝3＋1＝4．最后再来一个，有人退了1件货，这件货当初我赚了他2元，那么，退货用减法，赚钱是正数．也就是3－（＋2）＝1．通过这个例子，你能理解加减法和正负号的区别了吗？

关于加减和正负的不同，还可以给出很多其他的比喻，比如在走路的时候，如果我们把前进叫作加，那么后退就是减，那什么是正负呢？正负就是我们面对的方向，比如规定南边是正的，北边就是负的．也就是说，面向南走就是加正数，面向南后退就是减去正数．再比如，如果

把军队里增加一个士兵当作加法，那么牺牲一个士兵就是减法，那什么叫正负呢？这个士兵是个好人就是正，如果是个“敌特”分子就是负的．当然，所有的这些类比都是为了加深理解．用一句话来总结加减和正负的不同：加减是一个动作，表示的是一个运动的过程；而正负是一个方向，表示的是一个静止的状态．

◎ 负数乘除法的变化：除法是乘法的逆运算

接下来，我们继续介绍负数的乘法．什么是乘法呢？乘法就是多次重复的加法．比如：小明每天吃3个苹果，5天能吃几个苹果呢？如果用加法需要连续地把5个3加起来，如果用乘法就可以直接是3×5得到15，这是小学阶段乘法的基本概念，如果有了负数以后，乘法的概念会发生什么变化呢？如果说3×5表示5个3相加，那么3×（－5）又表示什么含义呢？我们还是回到商人做买卖的那个实际场景中去，因为负数是人家先发明的．

如果把卖出商品叫作加，那么客户把货物退回来就要用减法；如果卖出去的商品赚钱了就用正数，赔钱了就用负数．那么，如果卖一件上衣赚3元钱，连续卖5件上衣，就可以用3×5表示，这就是标准的乘法，就会赚15元钱．如果卖一条裤子赔3元，连续卖了5条裤子，就应该是（－3）×5，也应该是－15元，就是倒赔了15元．

如果客人把卖出去的5件上衣退回来，原本一件上衣赚的钱要用＋3来表示，退一件货就是减去一个＋3，连续退5件就是（＋3）×（－5），也是3个－5，还是－15元．

如果客人把卖出去的5条裤子退回来，因为是赔钱卖出去的，每条裤子赔了3元，因此要用－3表示；裤子退了5条，是要连续减去5个－3，也就是（－3）×（－5）．这5条裤子是赔了15元卖出去的，现在退回来了，少赔15元，也就相当于赚了15元．因此（－3）×（－5）的结果也应该等于15．

总结一下规律，两个有理数相乘的时候，同号相乘得到的是正数，异号相乘得到的是负数．两个负数相乘，怎么会等于正数呢？这个式子看起来很诡异，有没有可能是算错了呢？要知道负数加负数等于负数，为什么负数乘以负数就得到正数了呢？另外，乘法的意思本来是连续相加．

乘法的本质是连续的计算，至于是连续地加还是连续地减，要根据乘法后面的乘数来决定．如果乘以一个正数，就是连续增加若干倍；如果是乘以一个负数，就是连续减小若干倍．学了个负数，加减法都变得这么复杂了，学负数究竟有什么好处呢？

负数的存在让我们把概念理解得更加清楚了．小学没有学负数，往往是直接根据结果是变多还是变少来使用加减法的，跟着自己的感觉走，感觉结果变多了就用加法，感觉结果变少了就用减法．但是，我们凭什么判断结果是变多了还是变少了呢？还是通过买进、卖出、赔钱、赚钱、前进、后退这些文字来判断的．中学阶段关注的是变化的数量，很多题目就会变得非常复杂，靠直觉就不能一眼判断出结果的多少来了．在这种情况下，题目的结果就变得不是很重要，而过程的分析就变得重要起来了，只能根据题目中给出的文字描述或者图形来判断分析结果．

在题目中，前进、后退、朝南、朝北，这些概念都是通过文字或者图形直接给出的，只要把这些概念和加减正负一一对应，几乎不用思考就可以直接把算式写下来，这个过程只会让判断变得更简单．学习初中数学，就不能靠直觉了，必须依靠自己的理性，依靠扎实的推理能力，一步一步地细致分析，才能得到正确结果．

学习了负数的乘法以后，负数的除法也就不难理解了，除法是乘法的逆运算，除以一个数相当于乘以这个数的倒数．负数的除法运算，同样也是同号得正、异号得负，在计算乘除法的时候，要先搞清楚数字的符号，剩下纯数字的那个部分，只要把它当作正数，按照小学里学的计算规则，该怎么算就怎么算就成了．

通过分析，我们发现负数和原有的数学理论是相容的，这样一来，负数的存在就被大家普遍接受了．别忘了，在正数和负数中间，还有一个0．当负数产生以后，0就坐落在正负数之间最为核心的位置上．0不但是存在的，而且还是必须存在的，0代表了永恒的不变，很多重要的规律都从0中走出来，很多问题的解决都要依靠0的帮助．甚至可以说，除了0和1之外，其他数字都不是数字，这又是为什么呢？

◎ 数字都是没有算完的算式：一切都在运动变化之中

$\frac{3}{7}$ 是一个数字吗？

你一定会说：它当然是数字了，这不就是标准的分数吗？但我要告诉你：它不是一个数字，而只是一个除法算式，只不过我们把除号上下的两个点去掉了，然后把除法上的除数与被除数堆放在一起了，它只是3÷7的简写而已，这么说也有一定道理吧．那么，3.5是数字吗？也不是，因为3.5不过是3＋0.5，把0.5放在整数3的后面而已．那么0.5是数字吗？当然也不是了，不过是5÷10这个算式的省略写法而已．这么说来，23也不是数字，因为23只不过是20＋3，把加号去掉了，把3写在了20后边那个0的位置上而已．

按照这个道理来看，似乎只有0至9这10个数字是数字了，其他都不是数字．你又说错了，实际上只有0和1是数字，其他数字只是一个代号而已，1＋1＝2说明了什么？它说明世界上根本不存在2这个数字，只不过是为了书写方便，把1＋1这三个字符写成了2的形状而已．那么5当然就是1＋1＋1＋1＋1的缩写了．如果说1也是0＋1的缩写，这个逻辑是对的，我可以只通过1和加号组合出2以及后面的数字来，却不能通过0加上任何符号组合出1来．从0到1，是从无到有的过程，这个过程是不能忽略的．正是由于数字的本质都是0和1的组合，所以我们才能够在计算机和手机的屏幕上看到一个精彩纷呈的世界．

1＋1＝2，2＋1＝3，从1开始，逐次加1，我们可以得到所有的自然数；因为一个个地数下去太麻烦，所以我们发明了加法，这样就可以不用挨个数一遍，就知道3＋5的结果等于8．同时，当我们发现自己在反复增加同一个数字的时候发现了乘法，因为乘法只是加法的一种简便算法，所以通过乘法得到的所有数字，通过加法也同样可以得到．因此通过乘法，我们并不能得出新的数字类型来．如果我们把乘法反过来就会得到除法．有了除法我们就发现，虽然任何两个数相乘都可以得到一个自然数，但任何两个数相除却不一定能够得到自然数．比如，3×2＝

6，$3\times3=9$，6和9除以3当然能够得到自然数，但如果6和9中间的某个数除以3，就会得到一个比2大比3小的数．但是在自然数中2后面一个数就是3，3前面一个数是2，两者之间根本就没有其他数字了．因此，要表达无法被整除的数字，就需要用到一种新的数字类型：分数．

和自然数一样，分数的个数也有无数多个，但是由于分数和自然数之间有着密切的关系，所以我们却不能再创造一种全新的符号来表示分数，而只能通过简化算式的方式来表示它，比如把$3\div7$的结果表示为$\frac{3}{7}$．其中的含义也就是把1平均分成7份以后，取其中的3份．于是我们就知道，分数并非是一种数字，它只不过是一个简化了的除式而已．

如果分数只是一个简写的除式，那它有什么意义呢？是不是仅仅在书写的时候少写两个点呢？当然不是，分数一旦作为一种新的数系出现，它就会有自己的加减乘除运算规律，这个我们已经在小学阶段学过了，这里就不再赘述．而且我们还知道，分数是可以化简的，虽然我们把3张饼分给7个人，只能得到$\frac{3}{7}$ 这样的数字，但是如果我们把3张饼分给6个人，却可以得到$\frac{1}{2}$ 这样的数字，虽然$\frac{1}{2}$ 在数量上等于$\frac{3}{6}$ ，但$\frac{1}{2}$ 和$\frac{3}{6}$ 的含义却是不同的．比如说我们在分饼的时候，$\frac{3}{6}$ 表示的是6个人围着3张饼一起分，却不知道该怎么分；而$\frac{1}{2}$ 则是把6个人先平均分成3组，把3张饼先平均分到3个小组中，然后每个小组两个人再各自分1张饼．

因为除法是乘法的逆运算，所以我们得到了一种全新的数系，那么减法是加法的逆运算，是不是也可以得到一种全新的数系呢？把3张饼分给7个人不够分，就会出现$\frac{3}{7}$ ，那么，如果我们要把3张饼分给7个人，还必须要求每人分得1张，会得到什么数字呢？那么算式就不再是$\frac{3}{7}$了，而是$3-7$．由于$3-3=0$，所以$3-7$肯定会得到一个小于0的数字，它比0还要小4，也就是说还要差4张饼才够每人1张．在自然数的数系中，小于0的数字同样是不存在的．那么怎么办？参照分数的处理办法，如果我们把3除以7写作$\frac{3}{7}$ ，那么$3-7$不就可以直接写成$3-7$吗？不过我们还必须像分数的化简一样，把$3-7$这个数字也化简一下，得到$0-4$，再把0隐藏掉，于是就得到了-4这样一个简化的算式，进而我们

可以得到负数这种新的数系．

同理，如果我们把一个数字乘以自己叫作平方，那么平方的逆运算就是寻找哪一个数字平方后才能得到已知的数字，这个运算叫作开方．任何一个整数平方以后都可以得到一个整数，任何一个分数平方后都可以得到一个分数．但是，反过来，并不是所有的整数和分数都可以顺利地开方，那些通过开方无法顺利得到的数字，叫作无理数．

总结一下，乘法、乘方都是加法的变形、加法的简便算法，因此乘法和乘方不会带来新的数字类型，但是他们的逆运算——除法、开方和减法就不同了．当除法除不尽的时候，我们发明了一种数字叫作分数；当小数减大数不够减的时候，我们得到了负数；当开方开不出的时候，我们又发现了一种数字叫作无理数．分数、无理数、负数，这三类数字都是从自然数演化而来的，统称为实数，实数就是初中数学涉及的所有数字．在小学阶段，我们学习了分数就要立刻学习分数的加减乘除法则；同样，在初中阶段学习了负数和无理数后，也要学习这些数字的加减乘除、乘方开方的运算．

我为什么要强调这些数字都是一个个没有算完的算式呢？因为我要让你回归到数学的本质，以一个宏观的视角看待数学．别忘了，我们学习数学的目的，是为了更好地认识世界和改造世界．我们必须认识到：整个世界的一切都在运动变化之中，那些看起来静止不变的数字，其实描述的都是千变万化的运算过程．那么，为什么我要强调运算过程呢？因为我们初中阶段学习的是代数，接触更多的并不是数字，而是有很多字母组成的算式．如果我们没有这样的认识，过早地沉入复杂和烦琐的计算之中，很快就会在浩如烟海的数学中迷失自己的方向．

四　代数架构和代数思维

◎ 我们在日常生活中接触的一切，都是代数

什么是代数呢？有人说，代数就是用字母表示数，因为用字母代替了数字，所以叫代数，是这样的吗？这叫望文生义！如果用字母表示数叫作代数，那么我用汉字表示数就不叫代数了吗？我用图形符号表示数就不叫代数了吗？我们小学的时候就学过："甲、乙之和是18，甲、乙之差是6，请问甲、乙各多少？"谁能说这不是代数呢？我们还做过这样的题目："天平左侧有2个桃子，右侧有4个橘子，问一个桃子的重量相当于几个橘子？"谁敢说这不是代数方程呢？其实代数根本没有那么复杂，我们在日常生活中接触的一切，都是代数．

比如，我问你："一个苹果加两个苹果等于什么？"那你马上就会说三个苹果．在这个问题里面，我们就是用苹果来代表数字的．可是你说，那不对，刚才我们说的一、二、三才是数，苹果是个东西，不是数字．那我再问你，一个苹果是不是可能重300克？一个苹果是不是可能值5角呢？那如果题目变成一个5角加两个5角，结果是不是就等于三个5角了呢？对，这就是代数，代数就是这么简单．只不过因为汉字、图形写起来比较麻烦，所以，我们就常用英文字母来表示数字．

比如1个苹果加2个苹果等于3个苹果，如果我们用字母a 来代替苹果，那么，结果就是1个a 加2个a 等于3个a ．在这里，3个a 就表示3乘以a ，我们可以写成$3\cdot a$ ，或者直接写$3a$ ，如果是1个a 呢？我们也常常把1忽略，直接写成a ．也就是说，以上这个算式的代数表达式应该是：$a+2a=3a$ ．

在小学阶段，我们就曾经学过用字母x 来表示未知数，那么用x 和用a 有什么区别吗？如果严格地来说，还真没什么区别，只是我们使用它们的习惯不同．在代数学里面，虽然a、b、c 和x、y、z 都是字母，都可以表示数字．但是，我们经常用前几个字母a、b、c 表示已经知道的数字，又叫常数或者常量；而用后面的x、y、z 表示暂时还不知道的

数字，又叫未知数或者变量．a、b、c 也不是数字，怎么能用来表示已经知道的数字呢？这个意思就是，如果我们在做代数题的时候，你的计算结果写成$x = a + 2$，就算你把题目算出来了；但是如果你写成了$a = x - 2$，那就算你没算出来．虽然两个式子的意思看起来差不多，但是，按照习惯会要求你把变量x 写成用常量a 表达的方式．

那你会说，这题目里面有一大堆的字母，我怎么算得数啊，比如我知道$3+2$等于5，那么$a+b$ 我怎么知道等于多少呢？这个算式不需要计算，因为计算得到的最终结果，很可能就是一堆字母，我们不需要知道它等于3还是等于5，只要把一堆字母经过计算以后，不断化简，最后得到一个最简单的表达式就行了．比如：$2a + 3a = 5a$ ，$a + 3b - b = a + 2$．

虽然仍然不知道结果等于几，但是算式已经被我们化简到极简的状态，这就足够了．绝大多数情况下，初中代数都是在跟一堆字母打交道，我们就是要通过加减乘除的计算规则把它们算过来又算过去，折腾到最简单为止．那你又会说了，我为什么要折腾一堆字母呢，它有什么实际用途呢？这就问到点子上了，这些字母它们是怎么来的，刚才不是用a 来代表苹果吗？所有这些字母代表的都是日常工作或者生活中的某个数量，只不过在一般情况下，这些数量之间的关系比较复杂，我们就是要通过计算，把它们之间的相互关系理清楚，只有弄清楚了它们之间的相互关系，才可能通过控制一个数量来控制其他的数量．

说了这么多，还是举个生活中的例子吧．比如，一种商品的利润和价格有关系吗？什么叫利润呢？利润不就是赚了多少钱吗？赚钱多少当然和价格有关系了，因为商品的利润等于价格减去商品的进货价．那么，商店赚钱的多少和商品数量的多少有关系吗？这个不用算，凭直觉我们就知道了，商品卖得越多，那肯定就越赚钱了．如果让列出代数算式呢？那就是商店的利润等于单件商品的利润乘以商品售出的数量，没错吧．那么问题来了，既然商品价格越贵赚钱越多，商品数量越多赚钱越多，我们就把一个超市全部堆满了商品，然后把商品价格定得高高的，不就可以赚大钱了吗？这样的结论好像不对，如果商品价格定得太高了，客户肯定不来买东西了；商品太多，把超市里的空地都占满了，客户也没办法进来挑东西了．那么结果为什么不对呢？为什么我们找到

了正确的原因，却得不出正确的结论呢？

因为我们刚才只考虑了商品的变化因素，没有考虑客户的变化．其实，超市赚钱的总数应该等于客户数量乘以平均每个客户购买的商品数量再乘以商品的利润．同时，超市来的客户数量和商品的价格和利润是有关系的，商品越贵，客户来得越少；商品越便宜，客户来得越多．现在，这个算式是知道了，但是它却仍然没有用，为什么呢？因为这个算式不能告诉我们到底把商品价格定在多少才最赚钱．因此，我们还需要继续分析下去．要想得出这个问题的正确答案，只有全面掌握了初中代数的内容以后才可以．在这里，只是通过这个问题来加深你对代数的理解，要知道我们之所以要折腾一堆字母，就是因为这些字母所代表的都是日常工作和生活中的某个数量．它可能代表利润，可能代表客户数；可能代表速度，可能代表路程；可能代表亮度，可能代表电量．总之，涉及生活和工作的方方面面，都是无数个变量相互作用的结果，我们只有认识了它们之间的相互关系，才能更好地工作、更好地生活．

在初中数学中，充满了由字母数字和加减乘除运算符号组合成的代数表达式．如果说，小学数学是算数字的话，那么初中的代数就是算式子．那么，这些式子要怎么分类呢？我们又要从哪里学起呢？

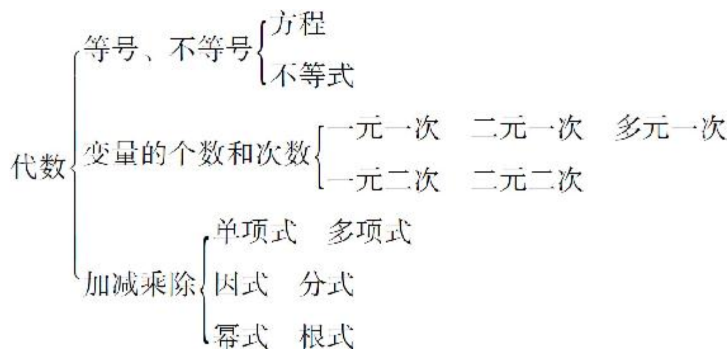
◎ 代数的知识架构：从宏观角度认识代数

不知你有没有听说过这样一个故事：有三个年轻的建筑工人一起在工地上劳动，有一个记者采访他们：“请问你在做什么呢？”第一个年轻人说：“我在搬砖和泥．”第二个年轻人说：“我在建设本市最高的商厦．”最后一个年轻人说：“我在规划这个城市的未来．”同样是辛苦的体力劳动，三个人感受到的却是完全不同的．数年以后，第一个年轻人还在那里搬砖和泥；第二个年轻人成为优秀的建筑设计师；而第三个年轻人则成了城市规划设计的专家．为什么我要讲这个故事呢？因为我们平时在学数学的时候，大部分时间也是在做一些看起来枯燥无聊的题目．在这种情况下，如果我们不能处在一个较高的位置上，不能有一个开阔的胸襟，很快就会失去奋斗的目标，迷失学习的方向．因此，我们就要站在一个制高点上，宏观地看一下代数知识的整体架构．

前面我们曾经介绍了代数要处理的内容，代数要处理的就是一堆由字母、数字和加减乘除组成的算式，如果说小学数学我们学的是算得数，那么初中数学学的就是算式子．那么，对这些式子，我们应该怎么分类呢？又从哪里开始学起呢？要想明白这个问题，我们就得分析一下，这些代数算式里面包含哪些内容，算式不是由字母、数字和加减乘除组成的吗？别忘了，算式里头还会有等号或者大于号、小于号，而这些组成部分就是我们的分类方法．代数的知识架构可以通过三种方法分类：第一，按等号和不等号分类；第二，按字母的个数和次数分类；第三，按照加减乘除的计算方法分类．

如果把算式按照等号还是大于号、小于号来区分的话，可以把算式分成等式和不等式，显而易见的是：含有等号的式子就叫等式，而含有大于号、小于号的式子就叫作不等式．不过对于含有变量的等式，我们还有一个中国传统的名字，叫作方程．为什么叫方程呢？这个方程的方，代表的就是几行几列的一个方阵，而程就是天平的意思，把一个方阵摆放到天平上就是处理含有乘法的等式．方程是我们2000年前的老祖宗处理等式的一种工具，就跟算盘的道理差不多．不过把等式叫作方程还是有点太古板了，而且你把等式叫作方程，那不等式叫什么？对不

起，它没别的名字，只能叫不等式．



前面我们用等号和大于号、小于号，把代数分成了方程和不等式．接下来我们再说字母，字母怎么分类呢？我们知道了，在代数里，字母表示的是常量和变量，常量好说，不用分类．那么，我们就根据变量出现的个数和次数的多少来分类．什么叫变量的个数呢？简单理解就是我们要做的题目里面有几个不知道的数字．那什么叫次数呢？就是化简以后，每个变量之间相乘了几次．讲到这里你可能会问，为什么乘了几次就算次数，加减几次它就不算呢？别忘了，我们的式子不是可以化简吗？假设我们处理的算式是$2x+3x$，我们不就直接把它变成$5x$了吗？这个变量x不就只出现了一次吗？在代数里面，变量又被简称为“元”．因此如果一个题目中只有一个变量，而且只出现了一次，我们就管它叫一元一次．如果处理的是等式，就叫一元一次方程；如果是不等式，就叫一元一次不等式．如果是两个变量，并且两个变量之间只是加减关系，没有乘除关系，那就叫二元一次．当然，还有三元一次、四元一次，初中阶段不学那么多，学会了二元一次就基本够用了；至于三元以上的那些方程，叫作线性代数，那是高中和大学阶段要学的内容．

如果在一个问题中，有一个变量间出现了相乘的情况，乘了一次呢？就相当于这个变量出现了两次，所以就叫一元二次，当然还会有三次、四次方程了，初中阶段学习的就是一元二次和二元二次的情况．多元一次的方程叫作线性代数，那么一元多次的方程叫什么，多元多次方程又叫什么呢？我要告诉你，三次、四次方程还是能够勉强求出得数的，超过四次以上的方程就很难求解了．这类问题大多数情况下只能通过解析几何、微积分、混沌系统进行大致的分析和描述．这些内容也都是大学阶段要学习的，初中肯定不会涉及．我们要知道的是，不是所有

的问题都是一定有解的．

说完了变量的个数和次数，再说加减乘除的算法．按照加减乘除也可以对算式分类，如果一个算式最后是由加减号连接起来的，这个式子就叫多项式；如果一个式子是由乘法连接起来的，这个式子就叫因式；如果一个式子是由除法连接起来的，这个式子就叫分式．除了这四个常用计算方法之外，我们还会学两种新的计算方法，第一种方法用来处理一个数连续相乘的情况，这种算法叫作指数，或者叫作幂，所以这种算式又叫幂式；另一种算法是用来求一个数是哪个数的平方，这样的算法叫作开方，通过开方得到的数字叫作根，这样的式子又叫根式．多项式、因式、分式、幂式、根式这五类算式就是初中阶段学的所有算式的分类．

到这里，我们学习了代数的知识架构，什么叫架构？架构就好比是一个整体的架子．我们要建设一个城市，就得先把交通网架设好；我们要建造一个楼房，就需要把钢筋水泥的骨架搭设好．同样，学习数学也得先有一个整体的认识，整个代数知识的大厦就是从字母、加减乘除这些最基本的东西展开的，它只不过是小学算术的一个升级版本而已．

◎ 代数和算术的差别：代数思维是难题化简、分工协作

对于一个刚从小学进入初中的同学而言，最难的东西并不是因为我们学习了负数，也并不是因为我们增加了字母，而是因为我们要习惯代数的思维方式．从算术思维到代数思维有一个很大的转变过程，这个思路的转变，是很困难的，有时候，越是小学数学学得好的同学，转变就越困难，这是为什么呢？下面我们就通过一道数学题来体会一下代数思维和算术思维的不同：

> 小明有一个苹果，妈妈又给他买了一些，现在一共有两个苹果了，请问，妈妈给他买了几个苹果呢？

这是一道小学一年级的算术题，大家都知道，我们只要现有的苹果减去原来的苹果，不就是妈妈买的苹果数吗？$2-1=1$，显然是买了1个苹果．题目做得没错，但是我们刚才的思维方式，就叫算术思维．那么，代数思维是什么呢？我们先看问题问什么，问什么就假设什么是x，而后根据题意列出一个含有x的等式．比如，我们假设妈妈给他买了x个苹果，然后再重新看题目．小明有一个苹果就写下1，妈妈又买了一些，买了苹果可以用加法，买了几个呢？我们刚才假设她买了x个，那么就是$1+x$，现在一共有两个苹果了，那就说明最后的苹果数为2．所以这个方程就列出来了：$1+x=2$．然后呢，我们再把这个方程解出来，把x前面的1移到等式右边，变成$x=2-1$，最后求得$x=1$．

费了半天劲，不还是通过$2-1$得到了1吗？代数方法就是让我们多写了一个算式，好像什么好处都没有．那些小学数学学得好的同学之所以不适应，就是因为如此．我们总感觉，用代数方法解题是在自找麻烦．那么，代数思维究竟有什么好处呢？对于简单的数学问题而言，代数思维的确没有多少帮助，但是代数思维却可以帮助我们解决复杂的问题，这就好比，如果我们只是走10步远的距离，开车就没有任何优势；但是如果我们要走的路程是10千米，那么开车就要快很多了．为什么说代数思维能帮助我们解决复杂的问题呢？因为代数思维可以把一个复杂的问题，拆分成三个互不相关的简单问题，或者说，可以把解题的过程

分成三个独立的步骤：发现问题、分析问题、解决问题．（如图4－1）

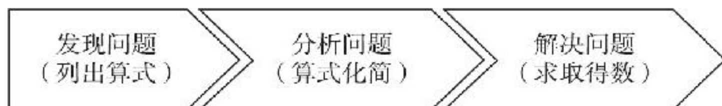


图4－1

第一步，发现问题．为什么要发现问题呢？数学题不是明摆在那里，还需要发现吗？那我要问你了，你凭什么认为这个问题就是一个数学问题呢？那你可能说，这问题出在数学卷子上，当然就是数学题了，难不成它还是历史问题吗？那我可就得提醒你了，我们学数学的目的，可不是为了做数学卷子．如果你在工作或者生活中遇到了一个问题，你通过什么判断，它是不是一个数学问题，又能不能用数学方法解决呢？我告诉你，最简单的办法就是，我们可以把这个问题用数学语言再重新描述一遍．通俗一点说，就是列个代数算式．可是列算式不是已经开始做题了吗？为什么我说它属于发现问题呢？这就是因为你不懂代数思维了．其实列式子不是在做题，而是通过数学符号，把题目中的意思重复地表达出来而已，这个过程就像我们把中文翻译成英文一样，只不过是把用自然语言描述的内容，直接转换成用字母数字和加减乘除描述而已．在列式子的过程中，是不允许有任何一点点计算的，题目怎么说，我们就怎么列，掺杂任何一点计算进去，都叫算术思维．

第二步，分析问题．什么叫分析问题呢？就是把算式化简．从这里开始，我们的操作和第一步已经完全分离了，列式子和化简算式是两个完全独立的过程：首先，在化简算式的过程中，完全不用关心这个算式里面的变量x、y 分别代表什么含义了．其次，化简算式所用到的，是移项、合并同类项等知识，这些知识跟如何列算式也没有任何关系；最后，一个算式化简的方法有很多种，无论通过哪种方法化简，都可以得到最终的答案，这个过程也和具体题目无关．那么，式子要怎么化简呢？这就要根据我们前文提到的式子的不同分类寻找不同的化简方法．我们在后面将逐一介绍．

第三步，即最后一步，解决问题．就是把数字代入最简的算式中，通过计算把最终得数求出来．在实际计算的时候，这一步有可能是独立的．比如，我们先计算的是一大堆算式，把算式化简后，再代入数字，

最后求解；但有时候算式里直接就有数字，在第二步化简的时候，直接就能够得到得数．需要说明的是，对算式的求解所用的知识就是小学数学的加减乘除，它又是一个独立的知识，因此求解也是一个独立的步骤．

你看到了吧，一个复杂的问题，可以很清晰地分割成互不相关的三个独立的步骤，问题的难度就会大大降低了．当然，在后续学习中，我们会发现这三个步骤还可以进一步地拆分为更细小的步骤，这样拆分的结果是，任何一个问题拆到最后，每一个步骤都会变成像$1+1=2$一样极为简单的问题．

同时必须指出，在实际工作中处理数学问题的时候，只要有必要，我们完全可以派三个人独立负责不同的步骤，比如第一个人负责把应用题列成方程式，第二个人负责方程式化简，第三个人负责计算最终得数．最终，三个人通力合作得到了答案，大家一起合作共同解决问题并不神奇，神奇的是，他们三个人完全不用相互交流就能完成工作．要知道，分工协作可是现代社会的基础，目前我们使用的一切产品，都是成千上万的企业和个人分工协作的结果．代数思维不但使难题化简，而且使分工协作成为可能．

五　用数学语言描述世界

◎ 代数的目的：用纯数学的语言描述复杂的世界

在前面我们介绍了什么是代数、代数的知识架构，以及代数思维和算术思维的差别．接下来，我们就讲述初中数学中的第一个难点：根据应用题列方程！列方程的过程，就是一个简单的翻译过程，把通过自然语言来描述的一个问题，变成一个用字母、数字和加减乘除描述的算式．我们说过，发现问题比解决问题更难，因此，这也是解题过程中最难的一步．当面对一个应用题的时候，我们应该怎样得到正确的算式呢？这个问题，是一个复杂的问题，根据题目难度的不同，我把所有的应用题分为四个等级：白描式应用题、隐含数字的应用题、隐含规律的应用题及实际工作生活中的问题．

今天我们要说的是最简单的一类题目，叫作白描式应用题．什么叫白描？白描就是用大白话把一切已知条件都告诉我们，我们直接机械地把文字翻译成数学符号就行．比如，三加几等于六？要列出这个问题的方程，简直不费吹灰之力，直接把几换成x就行了，那就是$3+x=6$．够简单的吧，那我们就再增加一点难度吧．

> 小明有5个苹果，他吃了一些，还剩下2个，请问：他吃了几个苹果？

这个问题也不难，小明有5个苹果就写5，他吃了一些，吃了以后苹果就少了，就用减法，吃了几个用x表示，那就是$5-x$，最后还剩下2个苹果，就是$5-x=2$．怎么样？一道题，从头到尾，是不是就像把文字转化成字母一样简单呢？那是不是这种方法只能解决一些简单的数学题呢？也不是，我们还可以继续增大难度．

> 小明有5个苹果，小明每天吃1个，妈妈有15个苹果，妈妈每天给小明2个苹果，问几天以后，小明和妈妈的苹果一样多？

这个问题看起来就困难一点了，但其实它也是一个白描式的问题：

> 小明有5个苹果，写下5．
> 每天吃1个苹果，那么x天吃几个呢？x个．
> 妈妈每天给小明2个苹果，x天给多少个呢？$2x$个．
> 小明一共有多少个苹果了？$5-x+2x$个．
> （然后我们再看妈妈这边）原来有15个，写下15．
> 每天给小明2个，x天就是$2x$个．
> 所以妈妈的苹果就剩下$15-2x$个．
> 最后他们两个的苹果一样多，也就是$5-x+2x=15-2x$．

我们的方程式就列出来了．注意，目前，我们只是发现问题、列出方程，并不对它求解．接下来让我们看一些更复杂的问题：

> 两个数之和是30，两数之差是10，请问：这两个数是多少？

因为要求两个数字了，所以要有x、y两个变量．两数之和是30，列出算式$x+y=30$；两数之差是10，再列出另一个算式：$x-y=10$．

这两个方程相互独立，所以可以组成一个方程组．

我们前文说过，由于这两个变量不存在乘除关系，所以这是个二元一次方程组．一般来说，对于一次方程，问题中有几个变量，就需要几个相互独立的等式才能求解，这里我们有两个变量，有两个等式，所以就可以求解了．按这个思路继续学习：

> 小明的苹果要分给一些同学，如果每人分6个就缺少3个，如果每人分5个就会剩余4个，问小明有几个同学，几个苹果？

这个题目仍然有两个变量：我们假设他有x个同学，y个苹果．每人分6个，x个同学就是$6x$个；缺少3个就是实际的苹果数比$6x$少3个，也就是$6x-3=y$．根据第二问，每人5个多4个，可以列出方程：$5x+4=y$．最后我们仍然得到了一个二元一次方程组．

再来一个题目：

> 小明今年5岁，爸爸30岁，爷爷60岁，请问再经过几年，小明和爸爸的岁数加起来就和爷爷一样大？

让我们假设经过了x 年，那么：小明的岁数是$5+x$ ，爸爸的岁数是$30+x$ ，爷爷的岁数是$60+x$ ，小明和爸爸的岁数加起来和爷爷一样，也就是$5+x+30+x=60+x$.

怎么样？这样白描式的问题不是很难吧．最后我们看看代数的“祖师爷”给我们留下的问题．目前代数的发明人有多个，其中一个是古希腊的数学家丢番图，在他的墓碑上，通过一道代数题描述了自己的年龄，碑文是：

> 这里埋葬的是丢番图的尸骨，下面的文字描述了他的年龄：幸福的童年占据了他生命的六分之一，又过了人生的十二分之一，他步入了青年，婚后，他幸福地度过了生命的七分之一，再过了五年，他的第一个孩子出生了，就这样又度过了人生的二分之一，厄运降临，他的儿子去世了，四年以后，由于悲伤过度，他也撒手人寰．

虽然这段文字描述很长，但不难发现，这也是一个白描式的问题，我们只要假设他的年龄是x ，就得到了代数方程：

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

从这个题目中不难发现，白描式的应用题，无论题目本身是什么含义，不论题目的表述多么复杂，我们只需要从头到尾地把每句话的含义都转变为数学符号写下来，就很容易得到最终的方程．的确，人类发明代数的目的就是为了用纯数学的语言去描述复杂的世界．牛顿说，当面对一个抽象的问题时，要想解答它，首先要把它从普通语言转化为代数语言．白描式的应用题是代数应用题中最简单的一种，但是也应该多加练习，因为它可以帮助我们尽快熟悉代数的思维方式，摆脱小学算术思维的束缚．

还有一些应用题，有些条件是隐含在题目中的，需要我们把它们挖掘出来，才能凑出我们需要的方程式，这是一些什么题目呢？

◎ 寻找隐含的数字：鸡兔同笼和浪费水的水池子

有一些应用题从表面上看起来题目中缺少数字或者缺少什么条件．接下来，我们就看一下常见的鸡兔同笼问题：

> 鸡和兔子装在一个笼子里，这个笼子里一共有头20个，腿60条，问鸡和兔子分别有几只？

这个题目里，只有20和60两个数字，这两个数字相互之间也没有计算关系，一个表示的是头的总数，一个是腿的总数，它们之间，根本就不能相互加减乘除，那怎么办呢？不要忘了，一只鸡有两条腿，一只兔子有四条腿，这是人所共知的常识，我们得把这两个条件用上！如果我们假设鸡有x只，兔子有y只，那么根据题意：鸡和兔子一共有20个头，那就是$x+y=20$，这是个二元方程，我们还得列一个等式，还有腿呢？x只鸡就会有$2x$条腿，y只兔子呢，就会有$4y$条腿，根据题意，腿一共有60条，所以就是$2x+4y=60$．两个方程式都得到了，求解就不难了．

让我们再重新回顾一下这个题目，其中隐含了鸡有两条腿、兔子有四条腿这两个数字，所以看起来就有了一点难度．要解决这类问题，就必须结合生活常识，从常识里把题目中丢掉的数字给找回来．接下来，我们再做一个类似的题目：

> 现在是三点整，我要问你，这钟表的分针再用多长时间能把时针给追上呢？

这也是一个需要结合常识来求解的问题．首先要知道，这是一个追及问题，也就是让我们求跑得快的物体多长时间能追上那个跑得慢的．根据常识可以知道，在追及的过程中，无论是跑得快的还是跑得慢的，从开始追到追上以后，这段时间是固定的，也就是说，它们两个用的时间是相同的，而跑的距离呢？跑得快的会比跑得慢的多一些，多多少呢？多的就正好是一开始落下的那段距离．也就是说，开始的距离差加

上跑得慢的距离等于跑得快的距离，距离又等于各自的速度乘以时间．那么，这分针和时针的距离差是多少，速度又是多少呢？这就需要我们结合常识来判断了．我们都知道，分针一个小时走一圈，这一圈是60个小格子，而时针呢？一个小时会走过钟表上的两个数字间的距离，其中有5个小格子．一开始分针和时针的距离差是多少呢？我们再想想三点整的时候，时针分针分别在哪儿啊？时针指着3，分针指着12，他们之间的差距是3个数字，也就是15个小格子．条件都凑齐了，那我们就列方程吧：

假设过x 个小时后分钟追上时针，因为分针的速度是每小时60个格子，所以这段时间内分针走的距离就是$60x$ 个格子，那么时针走的速度是每小时5个格子，所以时针走的距离就是$5x$ 个格子，两个距离的差是15个小格子，也就是说$60x-5x=15$，我们的方程就列出来了．

像这类题目都是要根据常识补全数字的应用题．在这类问题中，我们更常见的是类似这样的问题：

> 一个水池，如果只开进水管，4个小时就能灌满；如果只开排水管，6个小时就能排空了，如果同时开进水管和排水管，那么这个水池什么时候能够灌满？

我们在解决这类问题的时候，同样会感觉缺少什么条件，因为题目并没告诉我们水池里能够装多少水，只告诉我们几个小时装满有什么用呢？别急，这属于标准的分式问题，在这类问题中，我们根据常识，也得不到什么现成的数字，因为世界上的水池大小不同，我们总不能根据自己家里的水池来计算．那怎么办呢？我们可以假设水池里装的水是1．这样就可以得到进水和排水的速度了．如果我们假设两个水管全部打开以后，x 个小时可以灌满，那么根据题意，只开进水管需要4个小时可以灌满水，说明进水管每个小时可以灌水$\frac{1}{4}$ ；而只开排水管6个小时可以把水放完，就说明排水管每个小时可以放水$\frac{1}{6}$ ，那么两个水管全开以后呢？每个小时存下的水的量就是进水量减去排水的量．也就是说$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ ．这样，我们就得到了方程式．

与此类似的问题还有下面的工作进度问题：

小明4个小时可以把活干完，小红6个小时可以把活干完，两个人一起干，多长时间可以干完呢？

同样的道理，我们也假设总工作量是1，这时候小明一个小时可以干$\frac{1}{4}$，小红一个小时可以干$\frac{1}{6}$，假设他们x小时可以干完，那么他俩一起干，一个小时可以做$\frac{1}{x}$，也就是$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$．这个方程式跟水池问题唯一的区别就是，水池问题是减法，工作问题是加法，其余的分析都是一样的，也就是说，当我们在没有现成的数字可以引用的时候，我们还可以借用数字1来表示总的数量．

最后，我们要总结一下这类应用题了：当我们发现应用题中给的条件不足的时候，就应该尽量从生活的常识里面去引用一些数字；如果常识也不能带给我们更多信息，那么，我们就可以尝试引入数字1来表示总量．对于这类题目而言，只要找到了隐含的数字，解题就不再困难了．

◎ 寻找隐含的规律：逆水行舟和溶液配比

接下来，我们要讨论一些更为复杂的问题，其中被隐藏的不是数字，而是规律．例如下面的问题：

> 有一个两位数，十位比个位上的数字大4，如果把十位和个位的数字对调一下，就会比原来的数大21，请问这个数是多少？

在这个题目当中，就不存在隐藏的数字，更不能假设一个总量为1，那么，应该怎么计算呢？我们应该把背后的规律找出来，什么叫规律呢？就是等量关系．比如我们假设个位数是x，十位数是y，那么，十位上的数字比个位上的数字大4，我们很容易得到等式：$y=x+4$．把数字对调一下，应该怎么表示呢？这就要求我们找出隐藏在对调这两个数字背后的规律．我们要知道，一个两位数的数值等于十位上的数字乘以10，再加上个位上的数字，也就是$10y+x$，那么如果对调了呢？就是把个位上的数字x挪到了十位上，结果就会是$10x+y$．它们两个差多少呢？差21，也就是$10x+y-21=10y+x$．于是我们就得到了这个二元一次方程的两个独立的等式．

与此类似的还有溶液配比问题：

> 我们用多少克30%的盐水和多少克50%的盐水能够配制出400克42%的盐水呢？

从这个题目中，我们看不出存在任何等量关系，这时候我们就需要根据常识，把背后的规律找出来．根据质量守恒的原理，在溶液配比的前后，溶液中各部分物质的总量是不变的，也就是说，混合溶液中水的量等于原来溶液中水的总量，混合溶液中盐的量也等于原来溶液中盐的总量．所以，我们就可以根据这个规律，假设需要x克30%的盐水，y克50%的盐水．最后需要的溶液的总质量是400克，也就是说，$x+y=400$，其中盐的质量分别是：$30\%x$、$50\%y$和$42\%\times400$．而其中盐的总量是不变的，也就是$30\%x+50\%y=42\%\times400$，这样一对方程组就得到了．

看明白了这个问题，我们再来看一个运动问题：

在一条河的上下游分别有A、B两个城市，如果我们坐一条快船，从A地开往B地，需要5个小时，因为河水在流动，我们回来的时候呢，就得逆流行驶，需要7个小时．现在这个快船满员了，就只能坐一条慢船了，这慢船需要7个小时才能从A地开到B地，那么，这条慢船开回来需要多久的时间呢？

乍一看，这个题目还是一个分数问题，只要我们设置A、B两地的总距离是1就可以了，但是仔细一想不是这么简单，因为船在走，水也在流．那我们首先就要把顺水行船和逆水行船的规律找出来．根据我们的常识，船在静止的水里走的时候，速度是固定的，不管往哪个方向走，都是一样的速度，走过相同的路程，那时间肯定也是相同的．但是，如果在流动的水里走，就要加上或者减去流水的速度．所以，要想对这个问题求解，我们就必须先把水的速度算出来．根据题意，我们得到，快船顺水5个小时到达，逆水7个小时到达，那么如果我们设置总距离是1，也就得到快船的顺水速度是$\frac{1}{5}$、逆水速度是$\frac{1}{7}$．如果我们设置水流速度是x，快船走的速度是y，就得到了$x+y=\frac{1}{5}$，$y-x=\frac{1}{7}$．解这个方程组就得到了水流的速度是$\frac{1}{35}$．我们再假设慢船的速度是m，逆水行船的时间是n，那么就得到了一组类似的新的方程式：顺水行船的速度是$m+\frac{1}{35}=\frac{1}{7}$，逆水行船的速度是$m-\frac{1}{35}=\frac{1}{n}$．求解这个方程组，就会得到最终结果了．

可以看到，跟先前的两类问题相比，这类问题明显要困难很多．当解决这类复杂问题的时候，如果我们从题目当中不能明确地发现等量关系，应该如何下手呢？为了把复杂问题化简，我们仍然需要把复杂问题拆分成三个独立的步骤来解决：

第一步，要想解决这个问题，就要先离开这个问题，按照这个问题的大意，先仿造一个最简单的问题．为什么我们不解决原来的问题，而要构造一个新问题呢？这是因为原来的问题里面，各种嘈杂的数字和信息都混在了一起，让我们很难抓到问题的本质．所以要先把问题的核心抽取出来，想一想，如果不是这个问题，而是另一个更简单的问题，我

会不会做呢？一个最简单的溶液配比问题应该怎么解决？一个最简单的顺水行舟问题怎么解决？从最简单的问题中，虽然不能直接得到答案，但是我们却可以得出此类问题的基本规律，从而发现等量关系，得出解决这一类问题的总的办法．

第二步，当等量关系得到以后，就可以在稿纸上横着把这个公式写下来．然后，我们再回到原题里面，把原题拆解成几个相互独立的过程，从每个过程中发现一个独立的等量关系，而后把他们分成几行，一行一行地把原题中的数据或者变量，写到和公式对应的位置上．也就是说，相当于我们先在稿纸上，画出来一个表格，表格的标题行，是一个标准的等量关系式；表格的内容行，就是题目中的每一种具体的等量关系．当逐渐把表格填满了以后，我们就分别得到了几个独立的方程式，最后，我们只需要选择相关的方程，就可以组成方程组了．

第三步，当然就是解方程组求得答案了．有时候一组方程组得不到最终的答案也不要紧，只要我们再多列几组方程就可以了．在这类问题中，除了常见的溶液配比问题外，还有时间问题、运动问题、工作问题、空间计算问题等．不过，无论问题如何千变万化，对于我们而言，只要找到规律，列出等式，再把变量和数字填进去，就可以得到方程了．

到这里，我们学习了根据问题列出方程的方法．其中最简单的问题是白描式的，基本上看见问题就能写出表达式；稍微复杂一点的问题是题目背后有隐藏的数字，需要我们结合实际，把缺失的数字找出来；而更为复杂的问题是在题目背后有隐藏的规律，要先化简、找到等量关系，而后再列个表格，把题目中的变量和数字都填入表格里面，从而得到我们所需要的方程组．道理就是这么简单，关键是要勤加练习，你光靠耳朵听是学不会游泳的，光靠眼睛看也学不会骑车．俗话说熟能生巧，所以还是抓紧时间，多做一点练习，在实践中学习．

那么，含有隐含规律的应用题是不是就是最难的问题了呢？对不起，仍然不是！学习初中数学的目的是什么？改变世界！目前我们发现了改变世界的秘密吗？没有！我们努力列方程式的一切目标都是为了发现问题，那么发现问题最难的是什么呢？不是在试卷上发现问题，而是

在实际生活中发现问题 .

◎ 怎样洗衣服最干净？用算式计算出结果

接下来我们要谈一谈生活中的数学．在日常工作和生活中，数学问题是无所不在的，我们要讨论的第一个问题是洗衣问题．衣服要想洗得干净，肯定是多洗几次比较好，所以我们就不讨论衣服洗几次的问题，而是把洗衣服的次数固定下来，假设衣服洗完了，剩下的工作就是要涮两遍了，而且这涮衣服的水，总量也是固定的．那我们要讨论的问题是什么呢？这个问题是，这涮两遍的用水怎么分配更干净：是两次涮衣服的水一样多干净呢？还是开始先少用点水，后多用点水更干净呢？也就是说，同样的水，涮两遍，如何分配水才能洗得最干净！有人说，先多用点水，因为一开始衣服脏；也有人说，先少用点水，因为要用更多的水涮最后一遍！这两种观点，哪个更对呢？

要解决这个问题，首先要判断一下它是不是数学问题．数学问题跟非数学问题有什么区别呢，如果不是数学问题的话，那它的答案就只能是定性的，只能大概地告诉我们干净不干净；但如果是数学问题，那答案就是定量的，它能够准确地告诉我们干净了多少．那么，这个问题应该怎么样去考虑呢？要知道这个问题里面可是一个数字都没有，我们怎么知道衣服干净了多少呢？这就是从实际生活中发现问题的难点了．要解决这类问题，我们同样要把这个问题分成三个步骤：第一步，从一个问题中发现可量化计算的规律；第二步，从给定的问题中发现常量和变量；第三步，列出算式并求得变量间的关系．接下来，我们就按这个步骤分析一下：

首先，这衣服洗得干净不干净是个什么问题，又如何进行量化评价呢？很简单，衣服上有脏东西，通过漂洗，可以把脏东西溶解到水中．那么，洗衣服的问题就可以简化为一个溶解问题．而衣服干净不干净就可以通过剩余在衣服上的脏东西的多少来判断．

规律找到了，接下来我们要发现常量了．所谓发现常量就是要从题目中找出数字，这个题目中除了衣服要洗两次之外，并没有其他数字，但是题目告诉我们了，涮衣服的水的总量是固定不变的，也就是说水的总量是个常量，我们假设它是a 升．那么，除此之外，还有哪些东西是

不变的呢？这就需要仔细分析了：如果我们要知道哪种方法洗得干净，就必须用一样脏的衣服，一样的洗衣服的过程来洗．换句话说，除了两次涮衣服的水量不一样多，其他因素全部都要相同，才可以比较．但是，我们的题目中，具体要用哪些数量呢？首先，一开始，衣服上含有的脏东西的数量是固定的．我们可以假设它有m 克；其次，我们每次洗衣服都要把它尽量拧干了，而实际上我们知道，无论我们怎么用力拧，衣服上还会沾着一小部分水分，这些水的重量也是相对固定的，我们假设它是n 克．也就是说，沾着m 克脏东西、n 克水的衣服，经过洗涤再拧干以后，衣服上还会沾着n 克的水．就这样，过程中的常量都找到了，3个常量分别是：水的总体积a 升；衣服上粘的脏东西m 克；衣服拧干以后沾的水分n ．

接下来我们继续寻找变量．假设第一盆水的容量是x 升，那么因为总容量是a 升，所以第二盆水的容量就是$a-x$ 升．然后我们就开始洗了：首先，我们把带着m 克脏东西和n 克水的衣服扔进第一个盆里，于是水的总量变为$n+x$ ，涮洗一遍以后，脏东西均匀地溶解到水里，水里含有脏东西的比例就是$\frac{m}{n+x}$ ，当我们把衣服拧干以后，衣服上仍然沾着n 克的水，这n 克水中所含的脏东西一共有多少克呢？用n 乘以刚才的比例就可以了，也就是$\frac{nm}{n+x}$ ；而后，我们把衣服扔进第二盆水中漂洗，第二盆水的总量是$a-x$ ，扔进来的脏东西有多少呢？就是刚才衣服上沾着的$\frac{nm}{n+x}$ ，用它除以水的总量$a-x+n$ ，得到脏水的比例是$\frac{\frac{nm}{n+x}}{a-x+n}$ ，从第二盆水里涮完以后捞出来，衣服上仍然沾着n 克水，这n 克水中的脏东西的总重量就是$\frac{n\frac{nm}{n+x}}{a-x+n}$ ，化简这个算式，得到最终结果为：$\frac{mn^2}{(n+x)(a-x+n)}$ ，衣服上沾有的水量n 和x 相比很小，在分母上可以被忽略，因此该结果可以近似看作：$\frac{mn^2}{x(a-x)}$ ．这个代数式表示的就是衣服最后的肮脏程度，如果我们把几个字母换成自然语言来表示就是：

$$衣服的肮脏程度=\frac{衣服上脏东西克数\times拧干后水的克数的平方}{第一盆水的体积\times第二盆水的体积}$$

通过这个算式不难看出，衣服一开始粘的脏东西越少越干净，衣服

拧得越干衣服越干净，这样的结论符合我们的常识．因为在我们这个题目中，我们假设了衣服是一样脏的，所以这两个数字都不能变，影响衣服是否干净的关键是分母的部分，如果两盆水的体积乘积越大，这个分数值越小，衣服也就越干净．由于我们还没有学到二次方程求极值的问题，我们就先不计算具体的数值了，但是可以代入几个数字算一下，比如一开始有10升水，那么如果我们把它分成平均分成两份5升的，两份水重量的乘积就是$5\times5=25$，如果我们把它分成4升和6升两份呢？就是$4\times6=24$，如果是分成3升和7升呢？那就是$3\times7=21$．依此类推，我们不难发现两盆水的重量差得越大，这个乘积就越小，而它们乘积越小，整个分数值就越大，于是这个衣服也就越脏，那什么时候衣服最干净呢？两盆水一样多的时候最干净了！这个结论很多人可能不信，但这就是洗衣服的科学原理，科学在很多时候都是违背人的常识的．

在生活中发现数学问题的解决办法：要想判断一个问题是不是数学问题，首先要看这个问题中是否隐藏着可以量化的客观规律，然后再找出过程中保持不变的数字；最后通过方程式来确定变量之间的关系．这样，我们就能通过控制一个变量，影响另一个变量了．这个办法绝不仅仅局限在洗衣服的过程中，它是一个通用的办法，我们在生活工作中遇到任何一个具体问题，都可以尝试采用这样的方式进行一下理性的思考．

◎ 手机图标应该分类吗？数学无处不在

下面我们继续讨论生活中的数学．手机桌面上的图标该不该分类呢？

首先要讨论的是，这是个数学问题吗？有人说，这不是数学，我手机上的图标怎么摆我自己说了算，这只是我的个人习惯问题，根本就不是数学问题．这话听起来很有道理．但我要问你了，世界上有没有人愿意手机屏幕只放一个图标呢？恐怕没有吧！那既然是习惯问题，为什么没有人这么做呢？很简单，因为他不想自找麻烦．其实，无论你的习惯是什么，我们的目标都是一样的，都希望让手机用着最简单、最方便．我们继续往下分析，对于手机图标的摆放问题而言，什么叫最方便呢？首先我们得明白，我们为什么要把图标摆在桌面上呢？答案很简单，为了快速找到App（手机软件）、快速打开App．这里面的核心价值点就是“快速”，数学问题就从这两个字里冒出来了，这速度不就是个时间问题吗，这“快”不就是在求时间的最小值吗？看到没有，经过分析，一个看起来不是数学问题的习惯问题，它就变成了定量的数学问题了．那么我们接下来又该做什么呢？发现常量！

但是发现常量的过程可就复杂了：你在手机上打开一个App的过程中，好像并没什么常量存在．我们每个人手机上的App数量都不一样多，每个人打开一个App的速度也不一样，如果所有数字都不相同，那我们怎么比较哪种方法更快呢？很简单，因为我们现在分析的不是某一个人的问题，而是所有人共同面对的问题，所以我们要把所有的数值平均一下，取一个发现App和打开App的平均速度，然后再计算．这样的平均速度怎么确定呢？每个人手机上App不一样多，打开的速度也不一样快．其实这也不难，我们可以尝试一下，在一个满屏都是App的图标界面上，从头看到尾，算算把每个App都看清楚需要多少时间，然后就知道看清一个App的时间了．那么，如何计算在一个屏幕上找到任何一个App的平均时间呢？可以认为它就等于屏幕图标数量的一半儿乘以看清一个App需要花费的时间，为什么是一半呢？因为这个App不一定出现在什么地方啊，出现在上面、下面、左边、右边任何一个地方的可能

性都有，把这个位置一平均，就相当于从开头找到中间．根据常识，手机上平均图标数量是80个左右，而我们看清一个图标需要的时间大概是0.2秒，手指打开一个App或者滑屏的时间是0.5秒，手机屏幕的图标数量是5行4列，也就是20个，就这样，所有的常数我们就都得到了．

知道了这些常数，我们就先看一下在没有分类的情况下，平均找到一个App所用的时间，因为手机上有80个App，每个屏幕上有20个，所以平均有4个屏幕．根据前面讨论的内容，我们可以假设出现在中间的那个App的打开时间就是平均时间．全屏一共有80个，中间的一个就是第40个，看清这40个图标要用的时间为$0.2\times40=8$（秒），因为它在第二个屏幕，所以我们还要翻一下屏幕才能看到它，所以还要加上一个翻屏的时间0.5秒，一共是$8+0.5=8.5$（秒）．

弄清了这个数字，我们再来讨论有分类的情况．这里我们要使用变量了．假设我们把手机桌面上的图标分成了x个分类，那么，再根据这些常量计算出来平均找到一个App用多少时间就可以了．如果我们把手机App全部放到了分类里，那么一开始，只需要一个屏幕就可以把这些分类装下了．我们要打开一个App，首先要从x个分类中找到指定的分类，这个平均时间就等于找到中间那个分类的时间，找到一个图标的时间是0.2秒．中间那个分类的序号是$\frac{x}{2}$，所以我们需要的时间是$0.2\times\frac{x}{2}=0.1x$．然后我们还需要动手指头打开这个分类，继续在这个分类下寻找，打开分类的时间是0.5秒，那么现在的总时间是$0.1x+0.5$，这个分类下平均有多少个图标呢？因为总数量是80个，所以平均有$\frac{80}{x}$个，我们找到这个图标所用的平均时间是多少呢？还是用找到一个图标的时间0.2乘以一半的图标数量，结果是$0.2\times\frac{80}{x}\div2=\frac{8}{x}$，最后，把这三部分的时间加起来，我们就得到了最终的代数式：

$$0.1x+\frac{8}{x}+0.5$$

．

接下来，我们尝试把几个分类数字代入试试看，如果我们把图标分成8个分类，所用到的总时间就是$0.1\times8+8\div8+0.5=2.3$（秒），如果我们分成10个分类，那就是$0.1\times10+8\div10+0.5$，结果同样是2.3秒．如果是9个分类呢？计算结果就是2.29秒，经过试算，无论是8个、9个还是10个分类，结果都是两秒多，这样的结果要比没有分类的8.5秒

要快得多，其中9个图标的分类是最快的．不过，要注意的是，这个结果是在一系列假设的条件下才成立的，如果你的反应速度不同、图标总数量不同，结果就不一定是9个分类最合适了．但无论如何，在图标数量比较大的情况下，手机图标有分类要比没有分类时方便很多．

通过分析手机图标分类的问题我们发现，手机桌面的问题从表面上看好像只是个人习惯问题，然而它的背后也同样隐藏着数学规律，只要我们经过耐心细致的分析，就不难发现其中的奥秘．我们之所以要不厌其烦地探讨这个问题，就是为了让你清楚地认识到，数学是无处不在的．学习数学的目的，是要让我们用更加理性客观的态度去看待这个世界．当我们看清这个世界的数学规律以后，就可以通过调整一些我们所能控制的因素，使得预期的结果达到最好，从而实现改变世界的目的．在后文中，我们还会涉及大量在生活和工作中的实际问题．

我们在前文中说过了，解决世界上一切问题的三个整体的步骤就是发现问题、分析问题、解决问题．我们把这三个步骤拿到代数学里来说就是列算式、化简算式、求出得数．那么算式应该如何化简呢？那就要看我们如何处理代数算式的加减乘除了，那么在加减乘除中又隐藏着哪些规律呢？

六　等式和不等式

◎ 等式的性质：三个基本

接下来介绍的是化简算式和解方程的知识．一个复杂的算式怎么样化简呢？这就要求我们重新认识等号及加减乘除的概念．我们先来认识一下等式的性质．

我们曾经详细地解释过$1+1=2$中的秘密，这个等式中隐藏着我们看待世界的三个重要的规律：第一，它表示在不同的事物中隐藏着相同的概念；第二，它表示在变化之中总有不变的规律；第三，它表示我们可以通过过程准确地预知结果．接下来，我们就从这些基本规律出发，进一步分析一下等式的性质．

我们曾经说过，带有未知数的等式叫作方程，而程的意思就是天平．如果我们把等式看作一架天平的话，很容易就能够根据天平的特征得出等式的三个基本性质：

第一，如果我们把等式的左右两边翻转过来，等式依然成立．比如$2+3=5$，把等式左右反转，得到的是$5=2+3$．同理，如果$a=x$，那么x也就等于a．为什么呢？因为等式是天平，把天平左右两侧的东西交换一下位置，天平当然会保持平衡了．我们把等式左右可以相互交换的这种性质，叫作等式的对称性，或者叫作反身性．

第二，如果两个数量都跟第三个数相等，那么这两个量也彼此相等．$2+3$是等于5的，$1+4$也是等于5的，所以$2+3$就等于$1+4$．如果$a=c$，$b=c$，那么$a=b$，这个性质叫作等式的传递性．这个也很容易理解，我们在使用天平的时候，如果称出的两个物体的重量都等于两千克，那么，它们两者的重量肯定是相等的．

反身性和传递性都是等式的最基本的性质，那么接下来，我们再看看等式的第三个基本性质．

在小学的时候，我们曾经做过这样的题目：

有一架天平始终保持着平衡，在天平的左边放着三个桃子，天平右边放着两个桃子和两个橘子，问：一个桃子的重量等于几个橘子的重量？

我们知道，在题目中左边的桃子和右边的桃子加橘子的重量是一样的，而天平是一个平衡的杠杆机构．我们在天平的两边同时加上同样重量的东西，或者同时减去同样重量的东西，天平仍然可以保持平衡．现在，在天平的左侧放着三个桃子，右侧放着两个桃子和两个橘子，如果我们把天平两侧同时拿走两个桃子，天平仍然可以保持平衡．这样，在天平的左侧就剩下了一个桃子，而右侧就剩下两个橘子了，这样我们就得到了最终答案：一个桃子的重量等于两个橘子的重量．

这个题目在小学阶段我们就非常熟悉了，我们应该从中发现什么规律呢？那就是，在等式的两边经过了相同的运算，结果仍然是相等的．这是等式的最重要的一个性质，任何等式，无论经过了怎样的计算，只要过程相同，那么结果一定是相等的．因为等式两边要经过相同的变化过程，所以这个性质又叫协变性．实际上，这个性质不仅仅存在于天平上，也不仅仅存在于等式中，它是我们这个世界的一个普遍规律．也就是说，从相同的起点出发，经过了相同的方向和相同的路程，最终到达的目的地也一定是相同的；几个相同的事物，经过了相同的变化过程，最终的结果也一定是一样的．

比如，几个一模一样的皮球，从一模一样的高度掉落下来，它们掉到了一模一样的地板上，那么我们就可以知道，这几个皮球弹起来的速度、高度及所用的时间一定都是相同的．再比如，几条相同的鱼，经过了相同的烹饪方法，最后色、香、味也会是一模一样的．

我们原来所说的，变化的事物里隐藏着不变的东西，这是这个世界的静态原理；现在我们说，相同的事物，经过了相同的运动变化，必然会得到相同的结果，这是这个世界的动态变化原理．这个原理表现在数学上，就是等式的协变性．一切解方程的具体方法，全部都是从这个基本原理中演化出来的．

比如：$x+3=5$．这个算式在小学的时候我们就学过，可是小学的时候是怎么求解的呢？我们当时的思路是，一个东西加一个数以后就变

成5了，说明这个数字肯定比5小．那么就用减法，所以x就等于5－3了．结果算对了，可是这个过程是小学的算术思维．那么，当我们学习了等式运算的基本原理以后，要怎么做呢？我们首先要看现在这个算式是什么，希望得到的算式是什么，然后再考虑一下怎么从现在的算式变成我们希望的算式．比如刚才的问题：

我们现在的算式是$x+3=5$，我们希望得到的算式是等号左边只有一个x，右边只有一个得数，那么怎么样从现在的算式得到最终的算式呢？那我们就要看看等号左右两边多什么，怎么样把它去掉．回头再看$x+3=5$，右边倒是挺简单的，左边除了x外，还多一个＋3，那怎么把左边多余的3去掉呢？此时，我们可以使用加减乘除任何的计算方法，也可以随便地使用世界上任何一个数字，但是只有一个要求，那就是：等号左边怎么做了，右边也得同步操作．怎么做可以把左边的加3去掉呢？很简单，再减去一个3就可以了．那左边－3了，右边是不是也得－3呢．对！我们把算式写下来吧：

$$x+3-3=5-3$$

左边的＋3－3相互抵消了，就变成了$x=5-3$，这个时候，等号左边的算式已经干干净净了，右边还多一个减3，那就把它再算出来，$5-3=2$，最后得到结果：$x=2$．

等式有三个基本性质，第一，等式具有反身性，也就是说等式的左右两边相互对换位置以后，等式仍然成立；第二，等式具有传递性，也就是说，两个式子都和第三个式子相等，那么这两个式子也相等；第三，等式具有协变性，也就是说，等式两边经过了相同的运算以后，等式仍然成立．那么，对于一个复杂的方程式，我们应该怎样计算呢？加减乘除的计算方法那么多，我们首先应该进行哪一步计算呢？

◎ 一元一次方程：等量关系

前面，我们讨论了等式三个基本性质：反身性、传递性和协变性，同时我们还利用等式的协变性，求解了一个简单的一元一次方程．接下来，我们就利用这些性质来继续探讨一下方程的解法．根据等式的协变性，等式的左右两边经过了同样的计算过程，等式仍然成立，那么如果一个方程式很复杂，我们应该如何实现逐步化简呢？先让我们看一个简单的方程式：$3=5-x$．

解方程就是要把方程式变成“$x=$____”的形式，也就是说，要把变量移动到方程的左边，而常数项移动到方程的右边，那怎么样来实现移动呢？根据等式的协变性，在方程左右两侧同时加上或者同时减去一个项，就可以把多余的项目消掉．首先，把方程式左右两侧都加上x，左边变成了$x+3$，右边是$5-x+x=5$，也就是$x+3=5$；为了消去左边的3，再把方程式左右两边同时减去3，左边变成了x，右边变成了$5-3=2$．最终结果仍然是$x=2$．

这个题目我们在前面已经处理过了，但是如果我们仔细回顾一下这两个题目就会发现，如果算式一边存在多余的加项，我们就可以在等式的左右两边同时减去它，如果算式一边存在多余的减项，我们就可以在等式的左右两边同时加上它．这个过程相当于把我们这个多余的项从方程的一边移动到了另一边，只不过把它移动到另一边以后，需要把加减号变化一下．这种处理办法就是简化方程式的最常用的办法，因为我们要把方程式中的某一项移动到另一边，所以这个操作就叫作移项．移项的关键在于，移项以后要注意改变加减符号．

下面我们用移项法解决一个问题：$2x+5=x+7$．

我们利用移项的办法把5从方程的左侧移动到右侧，移项后变成-5，于是方程变为：$2x=x+7-5$．再把方程式右侧的x从右边移动到左边，移动后变为$-x$，方程变为：$2x-x=7-5$．

在小学的时候我们就知道$2x-x=x$，这个操作的目的是把多个含有x的项合并到一起，所以叫作合并同类项．合并同类项是方程求解的

第二个常用手段，显而易见，它的目的是实现项的合并，在移项完成后，我们需要把左侧含有变量的项合并成一个，右侧不含变量的常数项也计算出来，最终得到答案，$x=2$．

接下来，我们继续处理一个问题：$3x-7=5+x$．

我们知道，通过移项可以把x从右侧移动到左侧，变成$-x$，把-7移动到方程式右侧变为$+7$，于是我们得到$3x-x=5+7$，把左右两侧分别合并同类项，得到：$2x=12$．x前面有一个系数2，它表示有两个x，那么，我们就可以利用方程的协变性，把方程的左右两侧同时除以2，得到$x=6$．方程左右两侧同时除以变量的系数，这是方程式化简的最后一步，这一步操作没有特殊的名称，一般我们就直接把它叫作系数化简．

以上，我们根据等式的协变性，得出了一元一次方程的三个常用化简方法：移项、合并同类项、系数化简．实际上这三种办法在小学的时候我们已经接触了，只不过当时我们没有对它们进行系统地分析．那么，这三个步骤有什么顺序吗？当遇到一个具体问题的时候，我们怎么知道先使用哪种方法呢？这就是本节我们要研究的核心内容，这个世界运动变化的可逆性．什么叫可逆性？通俗地说就是：进两步退两步等于没走！这个规律表现在数学上就是：任何一个数值，经过了一系列计算以后，再经过与之相反的一系列计算，还能得到原来的数值．

比如，$2+3$以后，我们再减去3，还能够得到原来的2，为什么会这样呢？因为加和减这两个动作是相反的，因此我们称加减法互为逆运算，所以一个数加上任何一个别的数以后再减去它，值不变．同理，乘除也是互为逆运算的，因此也符合这个规律，只要乘除的数字不为0就可以．那么，这个可逆原理怎么用在解方程上呢？很简单，当我们在解方程的时候，只要知道变量x依次经过了哪些变化，我们就可以按照与之相反的顺序把它还原成原来的x．

比如：$3x-2=4$．我们先看方程式的左边：$3x-2$，这个算式是由x先乘了3，再减去2得到的，那么，我们怎么样把整个算式变回原来的x去呢？很简单，只要按照与原来完全相反的顺序操作就可以了，$3x-2$是x先乘了3，那我们就后除以3，它是后减去的2，那我们就先加上

2．注意，因为我们是在解方程，所以这方程式的左边怎么做，右边就得怎么操作才行．

接下来，我们就按照这个思路解题了：$3x-2=4$方程左右两边先加上2，得到$3x=6$；再把方程左右两边都除以3，得到$x=2$．

按照这个思路做题，是不是一下子就找到问题的出路了？

接下来，我们再做一道题：$\frac{x-3}{4}=2$．

这个方程的左边x先减3，减完了以后再除以4．那么，解题步骤就反过来，先乘以4，再加上3．$\frac{x-3}{4}=2$，方程左右两边乘以4，得到$x-3=8$，方程左右两边再加上3，得到$x=11$．

那么，如果方程式的左右两边都有x，应该怎么办呢？我们就应该站在整个等式的立场上，这个两边都有x的方程式，一定是从简单的等式变化过去的．在变化的过程中呢？一定是从左边移动了几个x到右侧，那怎么办？与之相反，我们就先把右侧的x移动到左边来．比如：$2x+5=x+7$．我们一看，这个方程两边都有x，那就把右边的x项挪到左边，得到$x+5=7$．这样一来，只有方程的左边有x了，我们一看，这x是因为加了5才变成7的，要找到原来的x，就做个逆运算，两边都减去5，也就得到了最终结果：$x=2$．

最后，我们再来看一道复杂点的题目：$ax+b=cx+d\ (a\neq c)$．

虽然题目里都是字母，但是x表示的是未知数，a、b、c、d表示的是常数，所以，只要把x移到左边，把a、b、c、d都移到右边，这个题目就算做出来了．我们就先移动一下吧：$ax+b=cx+d$方程左边多个$+b$，把b移动到方程的右边，得到$ax=cx+d-b$，右边了多了个cx，我们把它移动到方程的左边，得到$ax-cx=d-b$．然后我们把左边的x合并一下，得到$(a-c)x=d-b$，左边的x还多一个$a-c$的系数，就用除法把它去掉，于是得到最终结果：$\frac{d-b}{a-c}$．

方程在实际的工作和生活中表示的就是一种等量关系，它为我们描

述了这个世界运动变化的基本规律，让我们认识世界成为可能．本节介绍了一元一次方程的解法．运用等式的协变性和可逆性，我们就可以在一个等式加减乘除不断地变化中，不断简化，从而得到最终结果．

在本节的最后，我们要留下这样一个思考题：

有一天，你从大街上花了10元钱买了一只鸡，而后被人用11元买走了你的鸡，卖完以后，当你再想拿着钱重新买只鸡的时候发现，市场上的鸡已经12元一只了，请问，你到底是赔了1元呢，还是赚了1元呢？

◎ 无所不在的不等式：差异的存在

对于上节留下的思考题，有人说，我赚了1元，因为我兜里原来有10元，现在有11元了；也有人说，我赔了1元，因为原来我的10元钱能买得起一只鸡，现在虽然我有11元，但我还差1元才够买一只鸡了．如果我现在告诉你：就在你买鸡的时候，市场上的鸭子原来是10元一只，现在变成5元一只了，那么按照鸭子的价格来看，是不是你又赚了5元呢？这时候就又有人说了，那我们就得按平均物价来算了．但是又有人说了，我只不过就是一个人，平均物价跟我有关系吗？我又不会把所有东西都平均买一遍．越折腾越乱了，我看这实在是说不清楚了．我们不如先把这个问题放一放，再看一个别的问题吧：

有一天，你跟朋友去爬山，在超市花2元，买了两瓶矿泉水就出发了．可是到了地方一下车才发现，你买的矿泉水全忘带了，想从这里再买一瓶，可一打听车站的矿泉水5元一瓶，你一想这价格也太贵了，于是就没买．可到了爬山的地方一打听，这儿的矿泉水更贵，要10元一瓶，你更舍不得买了，你想算了，忍一忍就过去了，可是当你爬山的时候啊，遇到了危险，在山上暴晒了两天才被救下来，而你的这位朋友为了救你，把他仅有的两瓶水分给了你一瓶．我要问你的是，你认为他分你的这瓶水值几元钱呢？有人说，景区的水10元一瓶，那就值10元．也有人说，那要看你的朋友几元买的了，他花了多少钱，这水就值多少钱，还有人说，人家给你的不是一瓶水，而是一条命，而且人家把水分给你的时候，自己也处于危险之中，所以这水的价格值一条命．怎么样，这个问题，是不是比刚才的那个问题还要乱呢？

我想通过这两个问题说明什么道理呢？我想说的是，这两个问题的问法本身就是错误的，这叫通过静止的眼光去看待运动的世界．首先，市场上任何一个东西的价格都是瞬息万变的；其次，即使一个东西的价格暂时是不变的，那么随着这个东西所在的地点不同、用途不同，它实际的使用价值也会发生变化：同样一瓶水，可以用来洗手，可以用来解渴，也可以用来救命．但是，这三件事的价值存在着巨大的差别．所以我说，在不断变化的条件下，来谈一个东西的价格或者价值等于多少的

问题，是没有意义的．

等式可以让我们更加清楚地认识这个世界．但是，世界上从来就没有完全相同的两个事物，没有完全相同的变化过程，所以也就更不可能有完全相同的结果．所以等式只能在一定条件下近似地成立，而与此相反，不等式的存在就普遍得多．

当我们从楼下的超市买来一瓶水的时候，感觉一瓶水1元的价格是遵循了等价交换的原则．其实，我们心里也知道这瓶水在超市的进货价肯定只有几角钱，但我们仍然可以接受，因为我们都知道超市的老板付出了劳动，应该得到几角钱的利润．然而，当我们发现火车上的水5元的时候，我们就认为是火车上的人员在哄抬物价甚至是敲诈勒索，其实这种观点是不对的，因为同样一瓶水在超市的价值和火车上的价值是不同的．虽然这两瓶水的水质是相同的，但是它们的运输成本、管理成本和销售成本却完全不同，所以它们的价格出现了巨大差别，这也是可以理解的．

实际上，一瓶水从厂家生产出来，经过了批发商、零售商，最终送到我们手中的过程，每一个环节它的价格都在变化．同时，也正是因为这瓶水的价格不同，它才能够从厂家运输到我们手中，因为这个过程中任何一个环节的参与者都付出了劳动，如果商品的进货价和销售价一样，那么参与者就得不到任何好处，因此也就没有任何人愿意卖水了．从中我们发现，价格不同，是驱动商品在市场上流动的原因．商品的价格，不仅在不同时间、不同地点是不同的，甚至它在不同人的眼中也是不同的．就拿我们题目中的例子而言，如果对两个有良知的人而言，站在自己的角度，朋友送我的这瓶水，它就值一条命；但是站在朋友的角度来看，朋友所给出的，只是一瓶1元钱的水．如果朋友间能够这样看待问题，人和人之间才会相互理解、相互尊重、相互帮助．但如果是反过来，被救的人把那瓶水看得一文不值，而朋友把那瓶水看得价值千金，那么这个社会就不会和谐了．其实，不仅仅是商品，世界上任何一种运动变化的背后，都是因为差异的存在．

人类文明，都是发源于大的淡水河流域，非洲有尼罗河，中东有底格里斯河和幼发拉底河，印度有恒河和印度河，中国有黄河和长江．无

论是哪一条河流，如果没有地势高低的不同，河水就无法流动，也就无法哺育两岸的人类文明．同理，如果地球表面的气温没有差异，如果地球上没有春夏秋冬四季的变化，就不会有空气的流动，陆地上就不会有降雨，河流也会干涸，这样一来，不但人类文明不存在，恐怕陆地上所有的动植物都要灭绝了．而如果宇宙中任何地方都没有了差异的存在，整个世界就会陷入一片漫无边际的死寂状态，而且永无翻身之日，对于这种现象，科学家称之为热寂．这样看来，我们不但要认识到差异的存在，而且应该感谢差异的存在．有差异存在就有不等式的存在，所以，我们需要高度重视不等式的学习，不等式的求解过程和方程式有什么不同吗？

◎ 不等式的性质：方向的改变

接下来，我们就来研究一下不等式的性质，以及不等式的求解方法．前面我们研究等式的时候说过，等式具有反身性、传递性和协变性，并且我们利用协变性，推导出了求解方程式的三种方法，那就是移项、合并同类项、系数化简．那么不等式是不是也有这些性质呢？接下来，我们就一起来探讨．

在前文中，我们也曾经提到，方程就相当于是一架天平．那这不等式呢？不等式也相当于一架天平．区别在于，等式的天平，是处于水平状态的；而不等式的天平，是处于倾斜状态的．为什么是倾斜的呢？因为它一头重一头轻．不过，既然不等式是天平，那就好办了．我们就不妨在天平上来试一试它的性质．

首先是反身性，在等式那边，如果$a = b$，那么$b = a$．这个性质放到天平上就是，如果把天平左右两边的东西交换一下位置，天平仍然是平衡的．但如果这天平本来就不平衡呢？如果我们把左右两边的东西颠倒过来，那这个天平的倾斜方向肯定也就跟着颠倒过来了．其实，即使不挪动天平上的东西，我们也能明白这个道理．把天平摆好了以后，只要自己挪动一下身体，改变一下观察的角度就会发现，原来从前面看天平，现在挪到天平的后边去看，你就会发现这天平的左右两边它反过来了．也就是说，这不等式左右两边它也是可以对调的，只要我们把不等号的方向也掉个头、变个向就可以了．比如$5 > x$，如果颠倒过来那就是$x < 5$．

接下来，我们再看看传递性．如果我们把两个水果放到天平上，我们发现，苹果的重量大于桃子，我们把苹果拿下去，换了个橘子上来，又发现，这桃子的重量大于橘子的，那么，苹果的重量大于橘子吗？肯定大于，因为这橘子的重量比桃子都小，它又怎么能比苹果重呢？别说它的重量不如桃子了，就算它跟桃子一样的重量，都会是小于苹果的．通过这个实验我们就证明了，不等式也是有传递性的．也就是说，如果$a > b$并且$b \geq c$，那么a肯定是大于c的．

最后，再看看不等式是否符合协变性．如果我们在一个左重右轻的天平上，左右两边都加上相同的重量，天平是不是仍然保持原来的姿态呢？是的，左右两边增加了一样的重量，左边还是比右边重．不过，这个问题，我们还得仔细想一下，为什么在加上一样的重量以后，左边还是重呢？我们可以这样假设，假设我们从左边拿下一点东西以后，天平就平衡了，在这种情况下，我们放上重量一样的东西，天平还是平衡状态．这时候，我们再把拿下来的那一点东西重新放回去，这就发现了，左边肯定还是比右边重．根据同样的道理，左右两边减去同样重量的东西，天平的姿势也会保持不变．那么，如果我们加上一倍的东西会怎么样呢？左右两边原来重量的差，肯定就会被放大一倍，天平仍然是不平衡的姿势；同理，如果左右两边同时减去一半，天平也会保持原来的姿势不变．

经过上述试验，我们发现无论同加同减还是同乘同除一个数量，不等式的方向总是保持不变．不等式是不是始终可以保持协变性呢？不等号的方向是不是可以一直保持不变呢？我们还不能如此草率地判定，因为刚才只是试验了正数，还没有试验负数的情况．可是天平上称不了负数，那怎么办？就只能通过算式表达式来测试了．

比如$2>-4$，如果不等式两边同时乘以-1会怎么样？左边变成了-2，右边呢，变成了4，-2是小于4的，这时候我们就发现，同乘一个负数，大于号变成了小于号．同样，如果我们把$-2<4$这个不等式左右两边同时除以-2，左边就是1，右边是-2，左边就大于右边了．看起来，不等式左右两边同时乘以或除以一个负数，不等号的方向必须要发生改变．没错，这就是不等式和等式的唯一差别，当不等式两边同时乘或除一个负数的时候，不等号要改变方向．尽管我们试过了，我们还是要从理论上弄清楚，为什么乘除一个负数，不等号要改变方向呢？我们首先要清楚的是，这正负号本身代表了什么呢？它代表的本来就是状态、性质和方向．如果我们把不等式的左右两边都乘了-1，不就相当于我们把天平旋转了一下方向吗？这天平转向以后，不等号的方向肯定也要变．于是我们就知道，如果$a>b$，那么$-a<-b$．

以上是不等式的性质．接下来，我们说说不等式的解法．不等式在左右两边加减任何数字的时候，不等号的方向不变．这个性质对应着不

等式的方程移项的功能，移项就相当于左右两边同时加减一个要移动的项目．所以方程移项的功能，在不等式中依然适用，不需要做出任何改变．

合并同类项同样属于一个代数式自身的加减功能，跟等式和不等式都没有任何的关系，它当然适用于不等式．

解方程的最后一步，是通过乘除法消去变量的系数，这个可以直接用吗？不可以，这最后的一步，不等式与等式之间就有差别了，分正负两种情况：如果系数是正的，那么通过乘除法化简以后，不等号不变；如果系数是负的，化简以后，必须改变不等号的方向．

好了，道理都说完了，我们来做个题：$3x-5>x+1$．

怎么办，一看x分布在不等式的左右两边，我们就只能先移项了，把右边的x移动到左边，得到$2x-5>1$；再把-5移到右边去，变成$+5$．得到$2x>6$；最后一步，消除2这个系数．我们先判断一下系数的正负，2是个正数，就可以保持不等号的方向不变，两边都除以2，得到最终结果：$x>3$．

本章介绍了等式和不等式的性质，方程和不等式的解法．之所以要共同研究这些内容，主要是让你学会用代数思维解决问题，形成自己的知识架构．经过前面的分析，我们可以发现：问题的解法千变万化，其根本原因都是因为等式的协变性引起的．虽然我们对等式两边的加减乘除做了很多解释，但是对于合并同类项一直没有解释原因．为什么$x+2x$就等于$3x$呢？这就要求我们认真研究一下加减乘除的性质．

七　加减乘除的世界和人生

◎ 把问题摆在桌面上讲：加减乘除的计算规律

在前文中，我们介绍了等式和不等式的性质．接下来，我们就来探讨一下加减乘除的计算规律．小学阶段的加减乘除是在算得数，而中学阶段的加减乘除是要算式子．带有字母的算式远不如数字那么直观，需要从加减乘除最基本的规律入手．

在介绍等式的时候曾经提到，等式最基本的规律是反身性，也就是如果$a=b$，那么$b=a$．加法也有类似的性质，就是加法具有交换律．比如，我早晨吃3个苹果，晚上吃4个苹果，这跟早晨吃4个苹果，晚上吃3个苹果，结果是一样的，都是一天吃7个苹果．再比如，学校在我们家的东南方向，当我走路去学校的时候，我可以先往东走，再向南拐弯；也可以先往南走，再向东拐弯，这两条路线的总距离也是一样的．等式的协变性告诉我们，等式两边要经过一样的变化才能达到同样的结果；加法交换律告诉我们，即使经历的过程不同，即使走的道路不一样，也可以达到同样的效果．这是为什么呢？我们的确可以抽几个数字，做个试验来检验一下，比如$2+3=5$，$3+2=5$；再比如$5+7=12$，$7+5=12$．是不是所有的数字都符合这个规律呢？

现在的问题是：改变了加法的先后顺序，能不能改变最终结果？因为加法是两个数字相加的过程，既然是一个过程就有一个先后顺序．这个问题表现在实际生活中就是：不同的过程是否可以得到同样的结果．如果按照这个思路就要走进死胡同了，因为过程需要时间，这其中就包含着让人困惑的问题，我们没办法把过去的事情拿出来重新摆在面前了，比如吃苹果问题，难道你还能把吃了的苹果再变回来重新吃一遍吗？那么通过什么方法能够把一个过程直观地展现出来呢？在学习等式和不等式的时候，我们是依靠天平来帮我们做出判断的；那么有没有一个工具可以帮助我们验证一下加法交换律呢？你别说，还真有．

为什么非要把苹果吃到肚子里？我们可以找张桌子，把两份要相加

的苹果摆出来．比如，第一行，摆了早晨要吃的3个苹果；第二行摆了晚上要吃的4个苹果．这时候，所有的苹果都在桌子上了，这个加法的顺序问题就取决于我们通过什么角度去看待这些苹果了．如果从上往下看，就先看到3个，后看到4个，结果就是3＋4．如果转到另一个方向回过头来再看，这两行的顺序就发生了改变，第一行就变成4个，第二行就变成3个，这个算式就变成4＋3了．因为苹果始终是放在那里的，没有增加也没有减少，所以苹果的总数肯定是不变的，因此加法计算顺序的问题，就转换为我们从什么角度去看它的问题．同样一些物体，从不同角度去看，总数当然是不变的．所以，无论是几加几，无论如何颠倒加法的前后顺序，结果仍然不变．

其实加法交换律本身并不难理解，那么为什么我还要不厌其烦地研究它呢？因为重点不只是运算结果，而是考虑问题的整体思路，加法本来是一个动态的过程，既然是动态的就要经过时间，然而时间是看不见、抓不住的，时间过去了，我们就没办法比较了．那怎么办？为了研究一个问题，就得把时间问题变成空间问题，把一个动态的过程变成摆在桌面上的一个静态的结果，把一个事件的发生过程变成我们可以观察的角度．这样一来，不可解的问题，就变得可解了．

如果你仔细思考就会发现，上述这个证明方法中，其实是有一个问题的．那就是，同样是3＋4和4＋3的问题，为什么把3＋4和4＋3都算出来，两个算式的结果都等于7，只能证明这两个数字相加是符合交换律的；在桌面上放了7个苹果，根本没有把世界上所有的苹果都放上去试验，为什么就能证明任意的数字相加都符合交换律呢？接下来我们就一起来分析一下，从中再次领略代数学的魅力．

严格地说，这属于算术思维和代数思维的不同．如果通过算术的方法证明加法交换律，就得一个一个地加出来．比如3＋4＝7，4＋3＝7，怎么证明3＋4＝4＋3呢？因为两式的结果都等于7．可是这4＋5凭什么等于5＋4呢？难道它们相加的结果也等于7吗？不对了吧？这就是算术的局限性．在桌面上摆放苹果，其实是用苹果的个数来代表数字，它可以表示任意多个，三个怎么表示任意个呢？可不可以认为3个苹果是一包呢？可不可以认为3个苹果是一千克呢？可不可以认为它是4元买的呢？因此它表示出来的是任何数字，同时，我们证明两堆苹果加起来不

变的时候，我们也没有去数到底加起来有几个苹果，而是通过苹果不增不减来表示苹果的总数是不变的，所以通过这种办法，我们就证明了任何两个数字相加，相加的顺序都是可以调换的．用代数式表示就是$a+b=b+a$．俗话说，授人以鱼不如授人以渔．数学知识、数学定律，相当于一条鱼；而分析方法、思维方式，则是钓鱼的鱼竿，相当于渔．

现在我们掌握了分析方法，得出加法的结合律是不是易如反掌了？加法结合律，就是指三个数连着相加的顺序也随意调整，结果仍然不变，用代数语言表达就是$a+b+c=a+(b+c)$．简单说，结合律也是加法的计算顺序问题．交换律告诉我们两个数相加跟顺序无关，结合律告诉我们三个数相加也是一样，谁在前，谁在后，根本不影响结果．怎么证明呢？把他们摆在桌面上：三堆苹果摆成一个“品”字形，我们围着桌子转一圈就会发现，这三堆苹果，无论是谁出现在上头，无论是先加谁、后加谁，桌面上的苹果总数都是一样的．就这么简单．

两堆苹果放在一起是交换律，三堆苹果放在一起是结合律，那还有没有四堆、五堆苹果的什么律呢？对不起，没有了．在代数里面，每一个字母不但可以代表一个数，而且可以代表一个算式．把四个、五个数相加的算式，前后加上几个括号，用一个新的字母代表括号里的算式，这样就又变成两个字母或者三个字母相加了．比如：$1+2+3+4=4+1+2+3$，我们在这个算式的基础上，把$1+2+3$加上括号为$(1+2+3)+4=4+(1+2+3)$，然后用a代表$1+2+3$，用b代表4，不也就是$a+b=b+a$．这不也就是简单的加法交换律吗？

今天我们通过一个桌面，研究了两堆苹果和三堆苹果的问题，这三堆苹果研究完，所有加法的问题就被我们研究透了，这就叫：一生二，二生三，三生万物．

◎ 乘法也没什么不同：乘法分配律

接下来，我们继续研究乘法．所谓乘法，就是快速的加法．是否可以说，因为加法存在交换律和结合律，所以乘法就存在交换律和结合律呢？不能，因为加法的交换，只是时间先后的不同，而乘法的交换，却涉及含义的改变．比如下面的两个问题：

1．我每天吃3个苹果，5天吃几个苹果？
2．我每天吃5个苹果，3天吃几个苹果？

两题的算式一个是5×3，一个是3×5，虽然算式只是简单颠倒了一下数字的顺序，但含义却完全不同．

在加法交换律中，相加的两个数字虽然不同，但是含义却是相同的，他们要么都是数量，要么都是重量，要么都是长度，要么都是时间．但是乘法可不是这样，前面的3表示苹果，后面的5表示天数，为什么它们两个交换以后，最后的苹果总数仍然不变呢？那么，能不能把这个问题摆到桌面上讲？只要摆到桌面上，就可以把时间问题转换成空间问题来考虑，这样才能发现变化的规律．那么，我每天吃3个苹果，5天吃几个苹果，这个问题怎么摆呢？我们把苹果摆成几行几列就可以了，每天吃3个，每一行就有3个苹果，一共吃了5天就摆放5行．这样一来，我们5天吃的苹果就都在这里了．等我们摆好了以后，该干什么？围着桌子转圈．转了小半圈儿以后就会发现，原来的行变成列了，原来的列变成行了．所以这个算式自然就从3×5变成5×3了，从中我们可以发现：乘法算式的顺序问题，也可以转换为视角的问题，从不同的视角看过去，苹果的总数当然不会改变，所以说，相乘的两个数字调换一下位置，乘法的结果也是不变的，因此乘法照样符合交换律．

那么，乘法结合律又该怎么表示呢？乘法结合律说的是三个数字相乘，无论是哪两个数字先乘，最终结果都不会改变．这可不是三个数字相加了，直接把苹果分成三堆肯定是行不通的，那怎么办呢？只要把桌面上的苹果多摆几层就可以了．假设我们要算的是5×3×2，那么就可以把苹果摆成5行3列，分2层．等苹果摆好以后，重新观察就会发现，

5、3、2这三个数字组成了6个面的长方体．如果调整一下观察的角度就会发现，立方体的长、宽、高完全颠倒了，可以用三者之间的任何一个数字表示行数，任何一个数字表示列数，而剩下的一个数字就可以表示层数了，因此计算苹果总数的算式也就可以任意调整顺序了．于是我们就得出结论：三个数相乘，得到的结果和乘数的顺序无关，乘法结合律成立．

如果是四个、五个数相乘呢？很简单，同样可以把其中的两三个数看成是一个数，然后这个复杂的乘式就只剩下两项或者三项了．所以，知道了乘法交换律和结合律，无论是多么长的乘法算式，结果跟乘数的顺序都是没有关系的．

接下来，探讨加法和乘法结合在一起的规律：分配律．实际上分配律也是我们常用的计算方法，我们求解方程的时候都知道$2x+3x=5x$，这里面用到的不就是加乘的分配律吗？那么，分配律为什么能够成立呢？其实这个问题也很简单，取决于我们怎么看待这个乘法方阵了．继续把这个5行3列的苹果摆好，面对这15个苹果，我们有很多不同的视角．刚才是换了个角度把它看成3行5列，其实我们不换位置，也可以先数出2行苹果来，计算$3\times2=6$，然后再把剩下的3行苹果数出来，计算$3\times3=9$，等两边都数完了以后，再把苹果的数量加到一起：$6+9=15$，这个结果与3×5及5×3是一致的．你可能会问，为什么一定要把这堆苹果分成2行、3行呢？我分成1行和4行就不行吗？是的，同样的一堆苹果，无论怎么看，无论怎么分，无论怎么数，苹果的总量肯定是不变的．因为整体等于部分之和．这个规律又是一个世界上普遍存在的基本规律．按照这个规律，只要展开自己的想象就会发现，任何一个算式，其实都可以通过加减乘除的算法变化出无数的算式来．这个乘法的分配律，只不过是这些变化中的一个．

关于乘法分配律，小学二三年级的时候就学过了．我们不是学过两位数和一位数的乘法吗？比如34×2，我们是怎么算的呢？我们的算法是，先用4乘以2，得到8，再用前面的3乘以2，得到6．其实我们知道，前面的3表示的是30，所以这个6表示的也就是60了，最后我们把60和8加起来就得到了68．为什么我在开始讲代数的概念的时候，就反复强调，一切都是算式呢？这下你可以感受到了，就连两位数的乘法这么简

单的运算中，都包含着乘法分配律的道理．

讲到这里，不知道你有没有发现，有一个非常重要的问题被忽略了，什么问题呢？减法，我们怎么没讲减法就蹦到乘法来了呢？而且，最麻烦的是，在没有考虑负数的情况下，我们先摆出一个天平，又铺开一个桌面，证明了交换律、分配律、结合律的，一旦添加了减法，考虑到负数，会不会导致天下大乱呢？

◎ 负数会给我们添乱吗：数字带着加减号一起移动

接下来，我们讨论一下减法的规律．我们都知道，如果把相加或者相乘的两个数字颠倒以后，这个算式的结果是不会改变的；但是如果把减法算式的减数和被减数颠倒一下，结果就会变成了原来的差的相反数．我们知道，大数减少数，得到的是正数；如果把它颠倒过来，用小数减大数，得到的就会是负数了．这个减法看起来，好像跟加法、乘法完全不同．但是，如果多减去几个数就会发现，无论是先减谁、后减谁，结果都是一样的，比如8 - 2 - 3的结果和8 - 3 - 2的结果就是完全相同的，而且即使后面跟上二三十个减数，这些数字的顺序，也可以任意调整．如此看来，这个减法的规律好像真的要复杂得多．所以对于减法和负数，我们还必须认真分析一下．

前面我们曾经讨论过，减法是加法的逆运算，如果说加法可以让我们由过程得到结果，那么减法就可以让我们由结果反推出过程．可是这句话本身并不能让我们了解减法的规律．那怎么办呢？不妨借鉴一下分析加法的办法．我们分析加法时曾以桌面作为平台，把一个变化的过程变成了静止的一堆苹果．因此，我们也可以设计一个装置来研究一下减法，这次用一个瓶子．假设我欠你一些钱，现在我拿着x元来还债了．此时，在你的手里有三张我写的欠条，假设我借你的钱数分别是a、b、c，我每还你一笔钱，你就把欠条还给我，我们就用这个过程来模拟减法．那么，有意思的问题来了，我们用瓶子干什么呢？很简单，我会要求你把价值a、b、c的三张欠条都放到瓶子里，然后再一张一张地拿出来，我好一张一张地还债．之所以要用瓶子，是为了让这个过程更加透明，因为我之前打好的欠条总数也是固定不变的，所以无论你把欠条从什么位置拿出来，钱的总数和欠款总数都不会变，所以这个操作并不会对最终结果带来什么影响．

那么问题来了，如果这时候我们摇晃一下瓶子，把欠条的顺序打乱了，我欠你的钱数量会变吗？根据常识，欠款总数肯定不会变，因为欠条没有变多，也没有变少，只是欠条拿出来的时候顺序变化了．它的数

学规律是什么呢？很简单，它是加法交换律，为什么是加法呢？因为瓶子里的欠条在你的眼中都是正数，马上就会变成一张一张的钱了，每一张欠条变成的钱的数量是固定的，所以在你看来，它们就是固定的一些数字在相加，总数不变．但与此同时，在我的眼中，那些都是我的负债，它们都是负数，由于通过你的视角观察，这些欠条总数不变，所以在我的眼中，它们的总和也一定会保持不变．于是，我们就证明了，负数之间也是可以存在加法交换律的．这就是说，如果我把被减数后面的一堆需要减去的数字任意移动位置，最终的结果不会发生变化！用代数式表示就是：

$$x-a-b-c=x-b-c-a=x-c-b-a$$

更有意思的是，对于同样的一瓶子欠条，你会把它看成加法，而我却把它看成减法，这意味着连续减去几个数，就相当于减去这几个数的和，而这个规律就是减法的结合律．用代数式表示就是：

$$x-a-b-c=x-(a+b+c)$$

它和加法结合律的区别在于，加法结合律不用改变数字的正负号，而减法结合律需要改变正负的方向，也就是说先后减去两个正数，就等于加上两个负数的和．而先后减去两个负数，也就等于加上两个正数的和．那么，被减数怎么办呢？接下来更有意思的事情来了，我把准备还你的x元钱，也扔到了瓶子里（当然，这些钱还是属于我的），这时候再胡乱晃一下，用不同的顺序把它们取出来，我要还你的钱还会有变化吗？

请注意，我并不是把钱全部给了你，只是把它先放到了瓶子里，等一会儿我们往外拿的时候，我该还你多少钱还多少．显然，因为我的钱的总数没变，欠款总额也没变，所以差也不会有变化．这意味着什么？意味着被减数也是可以调换位置的，只不过，任何一个减数要挪动到被减数的位置上，要调整成负号．于是我们又证明了，正数和负数在一起混合加减的时候，仍然符合加法交换律，只不过有一个前提，就是要把减去一个正数看成加上一个负数，也就是说，只要数字带着它的加减号一起移动，最后的结果就不会改变．我们先前所讨论的，两个数相减的时候，顺序不能移动，就是因为少了一个减号．如果把减号和减数捆绑

在一起变成负数，则他们完全就是可以移动的了．用代数式表示就是：

$$x - a - b - c = -a + x - b - c = -b + x - a - c$$

负数和正数的交换律和结合律我们都讨论清楚了，那么，乘法中出现了负数又会怎么样呢，负数存在乘法交换律吗？首先，我们必须理解，负号表示的含义是性质或者方向的改变，那么，如果我们把正数和负数相乘的过程摆到了桌面上，会是什么样子呢？假设用正数表示我每天要买3个苹果，5天要买几个；那么，负数的概念就是，我每天要吃3个苹果，5天要吃几个．由于这时候我的手中没有苹果，所以我就只能在桌面上画出苹果的样子．结果，还会是5行3列的一个矩阵，只不过，真苹果变成了假苹果，买苹果变成了吃苹果．那么毫无疑问，结果肯定是一样的：$5\times(-3)=(-3)\times5$，因此负数也符合乘法交换律．

最后一个问题是：减法和乘法之间会存在分配律吗？由于在前面的讨论中，我们已经把减去一个正数视为了加上一个负数．所以，在加法和乘法之间存在的分配律，自然也适用于负数．

以上我们讨论了减法和负数对交换律、结合律、分配律带来的影响．我们发现：只要把减去一个正数当作加上一个负数来看待，原有的规律全部可以保持不变．不知道你有没有想到，为什么我们今天的例子中用到了两个人呢？那是因为，所谓的正负，表达的是一种性质一种方向，我们之所以通过两个人的视角来观察，只不过是因为双方的立场不同而已．关于正负数的概念，你还能想到其他的场景来证明吗？

◎ 减法和除法的独特优势：三个共同点

接下来看一下除法的奥秘，我们还是利用之前的桌面和苹果，构建一个除法的场景．首先把3个苹果从上到下一字排开，然后把每一个苹果用水果刀均匀地一分为4，再把切好的4份苹果水平分开放到小盘子里．这样一来，一个3行4列的果盘就展开在我们的面前了．你会说，这3行4列的方阵，它不是乘法吗？这是表示$3\times4=12$．这就是这个方阵的奥妙了．其实同样一个方阵，我既可以说是3行4列相乘得到了12，也可以说是把12块苹果按照水平方向平均分了3份，每一份就是4块了，同样我还可以认为这是3个苹果平均分成了12块，那么，每一块苹果就是1／4个，在同一个桌面上我们发现了如下两个等式：

$$12\div3=4$$

$$3\div12=\frac{1}{4}$$

于是，我们就得到了除法的第一个性质：如果我们把除数和被除数的位置颠倒了，得到的商就是原来的商的倒数．也就是说：

$$a\div b=c$$

$$b\div a=\frac{1}{c}$$

接下来我们继续观察这12块苹果，还能得到这样一个性质，无论是12先除以3再除以4，还是先除以4再除以3，总会得到相同的答案1，也就是说，连续相除的一系列除数，任意调换位置以后，最后的商是不会改变的．关于这个特征，我们也可以跟减法的连减操作来做一个对比，如果一个大数连续减去几个不同的小数，那么无论后面的几个数字的顺序如何变动，最后的差也是不变的．对于这个规律，我们也在前文做了详细的介绍．通过观察我们发现，除法跟减法的共同点真的很多．

第一，对于减法而言，减数和被减数翻转以后，得到的新的差和原来的差是互为相反数的．与之对应，在除法当中，如果除数和被除数的位置颠倒了，得到的商和原来的商就互为倒数．

第二，如果一个数字要减去多个数，减数的位置可以任意移动；如果一个数字要连续除以多个数，除数的位置也可以任意移动．

第三，即使减法和加法混合运算，它们的位置也是可以随意调整的，因为我们可以把减去一个正数看作是加上一个负数．同样，除法有类似的性质．

$6\div3\times2$跟$6\times2\div3$的结果一样吗？还真是一样的．原因在于：除法其实也可以当作乘法来看，我们在小学的时候就学过，除以一个数相当于乘以这个数的倒数，因为乘法是存在交换律和结合律的，如果除法变成了乘法，当然也就会有这两个规律．所以，对于一个乘除混合运算的算式，后面的数字和运算就可以任意移动位置了！可惜的是，如果是除法，不能把除数移动到第一个数字的位置上去．这个时候，我们就得参考一下第一条原则了．第一条原则告诉我们，除数和被除数颠倒以后，商是原来的商的倒数，那么，我们把除数变成原来的数的倒数，它也就可以移动到算式的第一个数字上去了呢？再试一试：$6\div3\times2$是不是等于$\frac{1}{3}\times6\times2$呢？$6\div3\times2=2\times2=4$，$\frac{1}{3}\times6\times2=2\times2=4$，结果完全相同！

于是我们就得到了减法和除法的又一个相似的地方，那就是：在一个加减法混合运算的算式中，如果是减数移动到算式的第一位，那么应该把减数变为它的相反数．同理，一个由乘除法组成的混合算式，如果一个除数移动到算式的第一位，那么除数应该变成自己的倒数．

下面应该学习最后一个规律了，除法具有分配律吗？很简单，因为除法可以被看作是乘法，所以它肯定是具有分配律的．不信，我们就试一试：$(6+9)\div3$是否等于6和9分别除以3以后再相加呢？$6+9=15$，$15\div3=5$，如果分开算：$6\div3=2$，$9\div3=3$，$3+2=5$．一点没错！

因为加减法和乘法配合的时候有分配律，所以加减法和除法配合的时候也有分配律．

我们学习了减法和除法，虽然它们的性质我们清楚了，但是我们仍然会有这样一种感觉，减法和除法总是不像加法和乘法那样简洁、优

雅，比如加法和乘法可以随便换位置，而减法和除法呢？你说它不能吧，如果它出现在算式后面，还可以随便换；你说它能随便换吧，但是它又不能移动到第一位，还必须得先调整一下才行，减法要变个号，除法要变成倒数．那么减法和除法有什么自己的优势吗？还真有！虽然减法中的减数和被减数不能随便换位置，但是如果我们把完整的减法算式列出来就会发现，它的减数和差是可以随便换位置的，比如：5 - 3 = 2，5 - 2 = 3．除法也是一样的，虽然除数和被除数不能随便移动，但是除数却可以和商随便换位置，比如：6÷3 = 2，6÷2 = 3．

换句话说，在减法或者除法的算式上，挨着减号或者除号的两个数是不能随便换地方的，挨着等号的这两个数可以随便换地方．换作加法和乘法，那可就没这个本事了．不信你就多试几次，那这又是为什么呢？为了研究这个问题，我们不妨通过代数表达式来观察一下．

如果我们把这个$a - b = c$的减号和等号换一下，就可以得到$a = b + c$吗？由于加法存在交换律，所以b和c当然可以随便换位置了．减法和加法互为逆运算，乘法和除法互为逆运算，所以这一点都不奇怪．从这里我们就可以发现：如果是一个算式变形，那么加法和乘法更有优势；而如果是处理等式的变形，那么减法和除法就更有优势了．

其实，减法和除法不只拥有这么一个优势，如果我们再回过头去看一眼，当我们把$a - b = c$变成$a = b + c$时，前面的等号变成了加号，前面的减号也变成等号，既然是变成等号了，那它就具有等号的协变性．比如等号左右两边同时加减一个数字，这个等式仍然成立，如果我们把这个规律拿到减法上去，你就会发现：减数和被减数同时加上或者同时减去任何一个数字，差不变．不信试试看吧．5 - 3 = 2，如果我们把减数和被减数都加上4，就变成了9 - 7，是不是也等于2呢？没错，那如果是除法呢？那就是除数和被除数同时乘以或者除以一个数字，结果不变．这个不用验证了，因为分数通分和约分的时候，分子、分母不就总是同时乘以或者除以一个数字吗？这样，我们就得到了减法和除法的第二个优势．

尺有所短，寸有所长．看来，减法和除法的优势还真不少．不过减法和除法真正值得注意的是：任何一个数减去自己都等于0，但0除外，

任何数除以自己都会得到1.0和1这两个数字是所有数字的起点，如果说加法和乘法能够让我们远足世界，那么减法和除法就可以让我们回归初心．0和1这两个数字可不简单，刚才讲到加减法和乘除法混合的交换律时，我们不是都觉得别扭吗？加法和乘法都能随便换位置，但是减法和除法就不能换到第一个去，因为任何一个加减法的算式，在它的前面都隐藏着一个重要的数字0，而任何一个乘除法的混合算式，在它的前面都隐藏着一个数字1．这又是什么意思呢？

比如6＋3－5，你以为真的就是6＋3－5，其实它表示的意思是，从0开始往后加，0＋6＋3－5，只要我们让这个0打头，那么后面的所有数字，所有算法就都可以随便挪位置了，只要把0放在开头谁都不敢不服！同样，如果是乘除法呢？在6÷3×2前面隐藏着数字1，也就是1×6÷3×2，只要保持1开头，后面的所有数字也都是可以随意移动的．为什么0和1这么神奇？没办法，这是一切数字的根基，它们两个的地位相当于所有数字的老祖母和老祖父，把祖先排在第一位了，谁敢不服？

我们把加减乘除的性质都认真梳理了一遍．其实这些知识本身并不复杂，即使我们不在这里强调，相信你也懂得交换律、结合律、分配律的道理，但是我为什么要如此大费周折呢？那是因为加减乘除之中，不但包含了我们认识世界的最基本的规律，而且包含着我们每个人人生中最基本的哲理．

◎ 人生中的加减乘除：平衡和取舍

加减乘除的基本规律不仅是数学的基本规律，而且还是我们认识世界和理解人生的基本法则．对于这些规律的认识，容不得一点马虎，容不得一点偏见．那么，接下来，我们就先说世界，后说人生．

如果我问你，世界上有哪些东西可以加减乘除呢？你肯定能列举出一大堆的东西：时间、角度、距离；面积、容积、体积；温度、密度、速度；电压、电流、电量，实在是太多太多了．那么，为什么这么多彼此不同的事物，它们都能通过加减乘除来计算呢？这个问题就连爱因斯坦都觉得奇怪，他曾经说过：这个世界最不可理解的地方就是它居然可以被理解．其实，这个世界之所以能够被人类认知，主要源于两个条件：

第一个条件是人的抽象能力．我们之前曾经讨论过，世界上的一切计算方法都是源于加法的，而加法存在的前提就在于相加的两个事物须是相同的．可世界上的事物偏偏又是不同的，那怎么办呢？我们就只能利用人类的抽象能力了，虽然这两个西红柿形状不一样，但是它们和黄瓜的区别更大，因此和黄瓜相比，这两个西红柿之间的不同就可以忽略了，这样我们就能把它们两个抽象成一类东西，起个名字叫作西红柿，于是两个西红柿之间的加法就成立了．同样，西红柿和黄瓜虽然有区别，但是它们和苹果的区别还是很大的，所以我们就再抽象一个名字叫作蔬菜．不管这个东西具体是什么，只要我们把它摆放到天平上，那就什么都不重要了，所有的东西都能被抽象出来一个叫作质量的东西．所以即便是西红柿和石头，它们的质量也是可以相加的．

当然，仅有抽象能力也还是不够的，要想让这个世界可以计算，还需要第二个条件，那就是这个世界必须是有规律的，也就是在不同的事物中隐藏着相同的事物，不同的运动变化的现象中隐藏着相同的规律．牛顿在它的经典著作《自然科学的哲学原理》中说道：我们没有理由认为，欧洲的石头和美洲的石头从同样的高度落下来，运动的方式有什么不同．这就是对这个世界的基本规律的认识．如果这个世界是完全没有规律的，一切事物都在混乱的运动变化中，我们人类的抽象能力再强，

也没有办法认识世界．

认识世界是改造世界的前提，既然这个世界的所有事物都是可以相加的，为什么人类的智慧不能相加呢？在当今社会，绝大多数的商品中都包含了成千上万人的劳动，对这一点，大家并不觉得奇怪．然而就在三四百年前，几乎世界上任何一件商品都是由一个人完成的，无论是家具、车辆还是手工艺品，都是如此，哪里会有成千上万人一起劳动的场面呢？我们今天花1元就买到的一支圆珠笔，在工厂里不到1秒钟就制作出来了，但如果我只让一个工程师手工把它做出来，恐怕我给他10万元，再给他10年的时间，他都做不出来．当今社会的经济发展，当今人类的文明成就，都源于人类的分工合作，源于人类智慧的可加性．世间万物具有了可加性，我们认识世界洞若观火；人类智慧具有了可加性，我们改造世界就如探囊取物．那么，如果我们不看整个世界，不看整个社会，只关注某一个个人，在我们的人生之中，还会存在加减乘除的哲理吗？

在我们每个人的一生中，我们的年龄在增长，我们的知识在增长，我们的财富在增长，这些都是加法．那么，乘法表现在哪里呢？很简单，我们年轻时学习，长大了用自己的知识来创造财富，这就是在做乘法．为什么这是在做乘法呢？我们可以试想一下，如果初中的孩子都不去上学，而是去工厂劳动，结果会怎么样呢？很显然，一个十三四岁的孩子，每一年中，他大概都可以赚三五万元．可惜，这三五万元，是通过加法加到自己的人生价值中去的，而如果他在学校学习知识呢？将来大学毕业以后，就可以做一些更有价值的工作，因为知识是不会消失的，所以他至少会在人生的每一年中，都多赚取三五万元．而这三五万元，是每年都会有的，因此它就不再是做加法，而是做乘法了．所以我们说，学习是做乘法，而工作是做加法．

一般来说，做乘法肯定要比做加法增长更快，那么乘法一定就比加法赚钱更多吗？那不一定，如果我们用一个数去乘以一个小于1的数，那么乘的结果不但不会变大，反而还会变小，这说明什么道理呢？这说明我们不但要学习，而且一定要把知识掌握得扎扎实实，如果所有知识都学得迷迷糊糊，那么在工作中就一定会疏忽大意，出现各种失误．因此，学习一定要认真，容不得半点马虎．

一般人都喜欢加法和乘法，不喜欢减法和除法，为什么呢？因为刚才我们说了，加法是工作，乘法是学习，都可以让我们有所收获，那么这减法和除法，肯定会让我们有损失，所以没有人喜欢做减法和除法．什么是除法，除法就是把你一生获得的财富和知识分享给其他人，那你肯定不愿意了对不对？但我必须告诉你，如果你在社会上只懂得索取不懂得回报，只懂得占有不懂得分享，那么你的人生价值就会大打折扣．

人和其他动物的最关键的区别，不但在于人类拥有智慧，更在于人和人之间的紧密合作．因此人与人之间更要懂得关爱，懂得分享．如果一个人临死前还有隐藏的钱财，那么他的钱财就会变成粪土一样没有价值，如果一个人临死的时候还有知识尚未传承，那么他的知识也会凭空消失．要知道，在这个世界上，最可怜的人并不是街头的乞丐，而是宫殿里的帝王．帝王在临死之前，仍然拥有无上的权力，无论是他的大臣还是他的儿子，都在盼望他的死亡，以便自己能够获取他的权力．也正因为如此，所以世界上的帝王没有几个得以善终，大部分都是被人谋害的．可见，不懂得分享的人生是多么可怜．

最后该说减法了：减法是不是说，把自己的财富分享给别人，自己的东西就减少了呢？错了！当我们把财富分享给别人的时候，自己拥有的东西只能增加，因为在你分享给别人的过程中，你的品德会增加，你的名望会增加，尊敬、爱戴你的人也会增加，你的人生价值更会因此而增加．

那么到底什么是减法呢？别忘了，人生最重要的是什么？时间！因为我们的生命是有限的，所以时间每过去一天，我们的生命就会减少一天，而在你的一生当中，无论这一天你赚了多少钱，无论你获得了多少成就，都没有办法跟自己失去的一天相比．一个世界富豪，可能一天就能赚几十个亿，但是他能用几十个亿换回一天吗？连一秒钟都换不回来！所以，跟我们失去的时间相比，所有的名利都显得一文不值．我们的整个人生，都是一场躲不过去的减法！那怎么办？

我们唯一能做到的，就是让每一天过得更有价值，在该学习的年龄就要认真学习，在该工作的年龄就应该勤奋工作．同样，该休息的时候就要好好陪伴自己的家人，在充分放松自己心情的同时，给家人、朋友

更多的关爱．要知道，我们生存的这个世界，不仅是物质的世界，还是精神的世界，我们物质的财富可以消失，我们物质的身体也可以消失，但精神的力量却可以永存．

由此看来，人生的过程不过是一场乘除加减的数学运算，人生的价值不在于我们积累了多少物质财富，而在于我们一生帮助和善待了多少人，在于在你临死的时候，有多少人真正地需要你，有多少人真正地怀念你．

八　二元一次方程

◎ 单项式：几个数和几条潜规则

我们重新认识加减乘除的目的是为了算式子，那么什么叫作式子呢？式子就是一堆字母和加减乘除的组合，算式子就是一个加减乘除的式子再通过加减乘除的算法，跟另一个加减乘除的式子去合并化简．是不是觉得有点乱？其实一点都不乱，$2x+3x=5x$，这是在干什么呢？前面的$2x$是不是就是2乘以x，后面的$3x$是不是3乘以x呢？把它们两个加起来，是不是一个乘法算式加上了另一个乘法算式呢？加完以后，再利用乘法分配律，把2和3加起来，x还放在那里不动，不就得到了$5x$吗？这就叫一个加减乘除的算式，通过加减乘除的算法，跟另一个加减乘除的算式合并化简．那么，算式之间怎么化简合并呢？我们要给这些算式先分一下类，根据不同的分类采用不同的方式处理．在代数的知识架构里面我们提到过，如果是由加减法组成的算式，就叫作多项式；如果是由乘法组成的算式，就叫作因式；如果是由除法组成，那就是分式．现在，请尝试按照以下思路展开你的想象：

如图8 - 1所示，如果我们把加减乘除从上到下一字排开，然后从左到右地复制成3列，就展开了代数算式的一张网，再把这个4行3列的加减乘除阵列，从左往右开始连接起来．你就会发现，第一行是加加加．三个加号的含义是，如果一个加法算式加上另一个加法算式，应该怎么计算？如果我们把前后两个加号用减号连接起来，就是两个加法算式相减又该如何计算？同样，还有相乘相除怎么计算？通过上面分析可以看到，一个加法算式和另一个加法算式有加减乘除四种计算方式，同样加法算式还要和减法算式计算，还要和乘除法算式计算．如果我们把所有的连接都连起来，会有多少种算式？$4\times4\times4$，一共有64种算式，这就是初中代数要学的绝大部分内容，这张知识的网就是代数算式的知识架构．

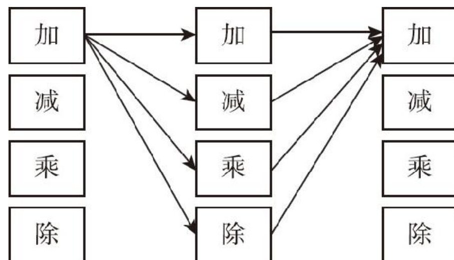


图8 - 1

架构搭好后先看一下整式里面最简单的单项式．什么叫单项式？单项式就是由一个数字跟几个字母相乘得到的算式，比如$3x$、$2xy$、$4x^2$，这里面只有乘的关系，没有加减法也没有除法运算．单项式很简单，是我们首先接触的代数算式．我们学习单项式，首先是要把一些最基本的概念搞清楚，单项式虽然简单，但里面仍然涉及好几个数字：

首先，代数式最前面出现的数字，叫作变量的系数，比如$3x$的系数就是3，$2xy$的系数就是2．

其次，代数式里的字母数量的总和，叫作变量的次数，比如$3x$，因为出现了一个字母，而且出现了一次，所以它的次数是1．再比如在$2xy$中，x y两个字母分别出现了一次，所以是个二次式，而$4x^2$，虽然这里边只有一个字母x，但是x^2表示x乘以x，x作为乘数出现了两次，所以它也是二次式．

然后我们还需要解释一下x^2右上角的2，这个2表示的是x的2次方，因为它出现在右上角，而且个头还很小，像一个竖着的小手指，所以它就叫作指数．其实，凡是有字母出现的地方，就有指数．只不过如果指数是1，我们就默认不写了，比如$3x$吧，我们可以认为是3乘以x的1次方．$2xy$呢，我们可以认为是2乘以x的1次方再乘以y的1次方．那么这个指数跟次数有什么关系呢？很简单，根据前面的描述可以知道，代数式的次数等于所有指数的和．

最后，毕竟这个$3xy$和$4x^2$是不同的，虽然它们都是二次式，但前面的算式有两个变量，后面只有一个变量，这个变量的个数，叫作元数，所以这个$3xy$是个二元二次式，而$4x^2$就是一元二次式．

以上我们介绍了系数、次数、指数、元数，接下来，再介绍几条“潜

规则”：

第一，数字与字母或字母与字母之间的乘号是可以省略的，比如 $2\times x$ ，我们就写作 $2x$ ；

第二，数字要写在字母的前头，比如 $x\times 2$ ，我们应该写成 $2x$ ；

第三，如果系数是1或者 -1，也就是 $1\times x$ 或者 $-1\times x$ ，1可以忽略不写，那就可以直接写成 x 或者 $-x$ ；

第四，指数是1的时候，也可以忽略不写；

第五，如果这个单项式里有除法，而这个除数是一个数字，通常我们把它看作一个系数是分数的单项式．比如 $\frac{xy}{6}$ ，我们就把它当作 $\frac{1}{6}xy$ 来看待，而不是把它当作一个分式．

关于单项式的基本知识就是这些，接下来是不是该学一学单项式的加减乘除了呢？其实这些知识我们早就在用了，比如 $2x+3x=5x$ ，就是单项式的加法，$7y-4y=3y$ 就是单项式的减法．同时还知道，$x\times y$ ，可以写成 xy ，而单项式相除可能会得到一个分式，这个我们后续再讨论．单项式自身的计算就这么简单，相对而言，更需要知道的是，哪些事儿是不能干的！这才是学习最重要的东西．

比如这个加法，$3x+5x=8x$ ，那 $3x+5y$ 是不是等于 $8xy$ ？不成！为什么？因为在这个单项式里，必须得后面的字母完全一样它才能相加．这是加法的基本规律，反复强调过了，总不能让3只老鼠加上5只猫吧？$3x+5x^2$ 是不是等于 $8x^2$ ？也不成，为什么？因为 x 和 x^2 ，虽然是一类东西，但是单位不一样，这相当于用1米加上1平方米，用长度加面积，仍然是不可以的，本质上它们还是不同的事物．总结一下，就是在单项式的加减法中，只有变量和次数都相同的才能进行合并，其结果是系数相加减，变量和次数保持不变．

和加减法相比，单项式的乘法规则就简单多了．因为单项式本身就是一个数字和几个字母的乘积，再把两个单项式乘起来，就相当于一堆东西连着相乘，这就要用到乘法结合律了！可以把这一堆相乘的字母数

字整理一下，把数字放在前头，把一样的字母数数几个，把它这个相乘的次数写在右上角，结果就出来了．比如$2x^{2}y \times 3yz$，先看数字部分：$2\times3=6$；再看字母有几个，x、y、z三个字母，那就直接都写下来：$6xyz$；再数数每个字母分别乘了几次，x有2次，y有2次，z有1次，所以结果就是$6x^{2}y^{2}z$．

◎ 多项式的禁忌：混合运算的顺序不可随意调整

在代数学里面，单项式和多项式统称为整式．多项式又是什么呢？比如前面提到的$2x+3y$，在加号前后的两个算式，字母或者次数不同，无法进一步简化，就只能把多个项都摆在这里．像这样，由多个不能合并的单项式组成的加减算式就叫多项式．这跟多位数的道理是一样的，23，不就是$2\times10+3\times1$吗？我们拿它跟这个$2x+3y$对比一下，你就会发现，它们还真的很像，不就相当于$x=10$，$y=1$吗？所以多项式并不神秘．但是多项式的禁忌可就多了．

首先，多项式里面混合了加减法和乘法多种算法，前面我们研究加减乘除规律的时候就有一种感觉，好像加减法、乘除法都可以随便挪地方，还可以随便加括号、去括号．那么，如果加减乘除混合以后，还可以随便移动吗？比如，$3+2$加完了以后再乘以4，它跟3先乘4，再加2的结果是一样的吗？先算一下试试吧：$3+2=5$，$5\times4=20$，前面的算式等于20，后面的呢？$3\times4=12$，$12+2=14$，还真就不相等！

这说明加法和乘法混合在一起的时候，算式的计算顺序非常重要，不能随便挪动．这时候你可能会想，只用一组数字试验能行吗？是否要用一个什么装置证明一下呢？关于这个问题，必须解释一下：道理也好，规律也好，定理也好，要想证明它是对的，举一万个例子都未必能行；但是，如果要想证明它是错的，只要有一个不成立，那就足够了．这又是为什么呢？为什么证明对就那么费劲，证明错就那么简单呢？因为我们要证明或者证伪，并不是一个独立的现象，而是一个通用的道理，既然它是一个道理，就得非常普遍地存在才可以．比如加法交换律，不能有些数字加起来能颠倒顺序而有些数字不能颠倒，如果定理自身不稳定的话，在工作生活中就没办法用它解决问题了．所以一个规律的证伪要比证明简单得多，只要举出一个反例，就可以说这个规律是不成立的．

由于证明一个事情是错的太容易了，这就导致很多人只记住那些正确的规律，而对于一件事情为什么是错的往往印象不深，从而导致他们

把很多规律不分场合地胡乱使用．所以，我们还必须证明一下，为什么加减乘除的混合运算，不能任意地调整顺序，刚才我们用三个数字证明了一次，这种证明方法叫作特例证明方式，因为2、3、4是三个特殊的数字，这是一个特殊的例子，所以叫作特例证明．接下来我们再用两种方式证明一下．

第二种方法：通过一个代数算式证明．因为用字母来表示数字，所以这个代数算式的证明又可以叫作一般证明．在这里，我们可以用a、b、c 三个字母来表示相加然后相乘的三个数，也就是（$a+b$）$\times c$，然后再颠倒一下顺序，变成a 先乘以c，然后再加b，即$a\times c+b$，接下来只需要判断一下，两个算式是否相等就可以了．为了计算方便，可以先假设它们相等，然后再判断相等的条件．假设：（$a+b$）$\times c=a\times c+b$，利用乘法分配律把左侧的c 乘进去，得到$ac+bc=ac+b$，等式两边都有ac，两边同时减去它，得到$bc=b$．

b 乘以c 以后，还等于它自己，有两种情况：一种情况是$b=0$，因为任何数字乘以0都等0；另一种情况就是$c=1$，因为任何数乘以1都等于它自己．现在把$b=0$或者$c=1$代入回原来的算式，（$a+b$）$\times c=a\times c+b$ 进行验证：如果$b=0$，那就变成了，（$a+0$）$\times c=a\times c+0$，化简以后就是$ac=ac$，这样的结果分明是告诉我们不允许加任何东西；另一种情况是$c=1$，再带回到原来的算式看看：（$a+b$）$\times 1=a\times 1+b$，乘以1的结果相当于不乘，化简后得到$a+b=a+b$，说明加乘混合运算的顺序，是不能乱动的！

接下来尝试一下第三种证明方式：类比证明．所谓类比证明，就是用日常生活中的现象，类比一个数学定理或者一个科学规律．准确地说，这个类比方法并不是一个严格的证明过程，但是这种方法却最容易引发认同感，因为通过那些冰冷的算式来计算，逻辑虽然很严格，但是由于平常看不见，对它们就没印象，产生不了共鸣．类比就不一样了，类比的例子都是生活常识，对它就会产生深刻的印象．接下来，说说这个加减混合运算为什么不能随便挪位置的问题．

前面提过，这个加减法，只要用0开头，所有的数字都能随便挪，例如，把5＋2－1看成是0＋5＋2－1，那么，只要前面的0不动，后面

数字都可以随便挪动，把减法挪前面去也没事儿，式子就会变成$0-1+5+2$，结果也还是等于6．乘除法也是如此，只要用1开头，后边的数字也就可以随便挪．比如$6\times3\div2$，我们把它看成$1\times6\times3\div2$，只要这个1不动，那所有的数字都可以随便挪，变成$1\div2\times6\times3$结果还是等于6．

其中的道理，当然可以通过代数方法证明，但是现在我不用代数方法证明，而是类比一下．在人类的哲学史上，0代表无，代表女人，而1代表有，代表男人；又因为这个加减法，是0打头的，可以认为0是所有数字的老祖母．同样，因为乘除法是1打头的，可以认为乘除法是归这个数字老祖父来管理的．这样一来，加减法就是女人该干的活，而乘除法就是男人该干的活．正因为它们分属不同的性别、不同的团队，由不同的领导来管理，所以加减乘除混合运算的顺序是不可以随意调整的．

你一定要把这个类比给记住了，因为，我们将来还会学习乘方开方的运算，这两个运算规则，也是归数字的老祖父1来管辖的，它照样是男人从事的工作，到时候你就会发现，在这些运算里面，乘除和乘方开方一样，顺序是可以随便动的．因此，我在这里给你举的这个例子，绝不仅是一句玩笑话，我们正在不断接近数学的本质、接近哲学的本质，不断接近人类智慧的终极真理．

◎ 多项式加减：凑成八个算式

加减乘除混合运算时，运算的顺序是不能随便调整的．正因为如此，我们需要知道多项式运算要符合哪些规则．

多项式的加减运算，俗称去括号．为什么叫作去括号呢？因为一个多项式要加减另一个多项式，这两个多项式就只能先用括号括起来，不然这一大堆加减号直接放在一起，那不就直接变成一个多项式了吗？还怎么叫多项式的加减呢？我们在前文中，曾经把这个加减乘除的算法，组成了4行3列的网格，因此展开了初中代数的所有算式的算法．现在我们要学习的多项式加减，就相当于用一个加减算式去加减另一个加减算式．如果把这两个加减算式展开，一共有多少个算式呢？

如图8－2所示，如果把加式放在开头，有加式加上加式、加式减去加式、加式加上减式、加式减去减式四种算式；如果把减式放在开头，就又得到四个类似的算式，一共有八种算式．

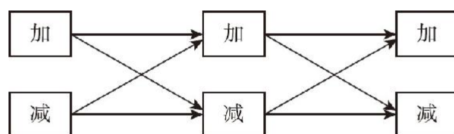


图8－2

那这八种算式要怎么算呢？先看看八种算式有没有简单的分类方法．

首先，可以把每个多项式本身都看成是由加法组成的．如果它本身是减法，就把它看成加上一个负的算式就可以了．比如$2x-3y$，就可以看成$2x+(-3y)$．这样一来，就只有两种情况需要讨论了，那就是：

加式＋加式

加式－加式

又由于前后两个加式都在括号里面，所以又可以简单地理解为，在

一个加减运算的算式中，怎么去括号．关于去括号的问题，也在小学阶段学习过了：如果括号前面是加号，那么就可以直接去括号；如果括号前面是减号，去掉括号的时候，括号里面的内容，就需要改变一下正负号．说起来就是这么简单，但是很多人就是经常犯错误．这是为什么呢？因为他们根本就没有深刻理解其中的原理，更没有把这个去括号的问题化作八个算式以建立自己的数学知识架构．有时候，一个规律越是简单，越会出现各种千变万化的结果，所以必须认真分析一下这个多项式加减的问题．

多项式相加，为什么括号可以随便去掉呢？这是根据加法结合律：因为$a+(b+c)=a+b+c$，就是做去括号的处理，三个数相加，先加前边还是先加后边，结果不变．那么$a+(b-c)$等于什么？等于$a+b-c$，为什么$b-c$不用变号呢？因为$b-c$相当于$b+(-c)$，原来是$b+(-c)$，现在仍然是$b+(-c)$．

多项式的减法，为什么$a-(b+c)=a-b-c$呢？因为减去两个数的和，等于分别减去这两个数，但这是小学的算术思维．从小就会背诵的这句口诀不是这个代数式的原因解释，只是通过自然语言把代数式又描述了一遍而已．那么，这个算式该怎么证明呢？除了加法交换律之外，在乘法分配律中也有去括号的过程．

$a(b+c)=ab+ac$这个过程不是在去括号吗？这个$a-(b+c)$就是利用了乘法分配率的原理．在一个数字乘以-1的时候，这个-1中的1是可以忽略不写的，其实$a-(b+c)$这个算式，本质上就是$a+(-1)\times(b+c)$的简写．这样一来，这个式子里就只有乘法和加法了，把-1按照乘法分配律乘到括号里面，那原来的$b+c$就变成了$(-1)\times b+[(-1)\times c]$，$(-1)\times b$可以直接写成$-b$，$(-1)\times c$可以直接写成$-c$，那么，整个算式就变成了$a+(-b)+(-c)$，也就是$a-b-c$．从这个证明过程不难发现，减法去括号的问题，根本没有什么特殊的规律，而只是根据乘法分配律得到的推论．

那么，如果减去两个数的差又应该如何计算呢？在$a-(b-c)$中，因为括号前面是减号，括号去掉以后，原来里面的内容全部都要变号，所以这个b就变成了$-b$，$-c$就变成了c，也就是说$a-(b-c)$

$=a-b+c$ ．在去括号的时候，除了熟记这个原理之外，最重要的就是分清减号和负号．有两个思路可供参考：一个思路是，把所有的减号都看成负号．这种办法的优点是不用考虑减法这种计算，一切都按加法看待．但这种思路的缺点在于，如果遇到了$a-(b-c)$这种情况，你就必须凭空地插入一个乘法，把减去一个算式看作是加上-1乘以这个算式．另一个思路是，只把括号外边的减号看成减号，其他的减号一律看成负号，这是一种更常用的办法，它的优点是计算起来更简单，但缺点也很明显，就是你一定要注意：不要对同一个负号看两遍，一会儿把它看成负号，一会儿把它看成减号，否则也会出错．

多项式的加减规则就这么多，接下来我们通过几个习题再重新熟悉一下这些规则．比如$2x+(3y-2x)$．括号前面是加号，直接把括号去掉就行，得到$2x+3y-2x$ ，我们把减$2x$ 看作加负$2x$ ，于是可以把它挪到中间，得到$2x-2x+3y$ ，$2x$ 和$-2x$ 相互抵消，得到最终结果是$3y$ ．

接下来，再看一道题：$4x-(3x+2y)$．括号前面是减号，$3x$ 和$2y$ 在去括号以后应该都变号，得到$4x-3x-2y$ ，把含有x 的式子合并同类项，得到最终结果为$x-2y$ ．

最后再看一道应用题：两数之和加上两数之差等于8，请问被减数是多少？被减数就是一个减法式子前面的那个数，就把这个代数式子写下来吧．假设这两个数是a 和b ，两数之和加上两数之差，用代数算式表示出来，就是$(a+b)+(a-b)$，其中的a 就是被减数．这个算式的结果等于8．那么，这个算式能不能化简呢？括号前面是加号，可以直接去掉，原式变为$a+b+a-b$ ，再合并一下同类项，b 和$-b$ 就不见了，结果剩下$2a$ ，原式等于8，也就是$2a=8$，等式两边同时除以2，得到最终结果$a=4$．

以上我们学习了多项式的加减法．我要提醒你，这个多项式的加减法，其实是可以凑成八个算式的．把$a+b$ 和$a-b$ 这两个算式，通过加减法连接起来，展开成八个算式，看一下相互之间加减的结果如何．去括号的方法是代数的基本技能，在接下来的二元一次方程的求解过程中，会反反复复用到它．

◎ 二元一次方程组：两个变量相互加减

我们把多项式的规律和等式的性质结合起来，一起研究一下二元一次方程组的解法．什么叫二元呢？二元就是两个变量．什么叫一次？一次就是这两个变量只会相互加减，不会相互乘除．什么叫方程？方程就是含有变量的等式．而方程组呢？就是由几个方程联合而成的一组方程．二元一次方程组都是由两个相互独立的等式组成的．

比如：两数之和是8，两数之差是2，请问这两个数是多少？

这个题中有两个不知道的数字，那肯定是二元了；两个变量之间又只有加减没有乘除，那肯定就是一次了；而且还有和、差两个独立的等式，所以就可以通过二元一次方程组来解决它．如果假设其中一个是x，另一个是y，那么把方程组写下来就是$\begin{cases} x+y=8, & ① \\ x-y=2. & ② \end{cases}$

这样的方程组应该怎么求解呢？首先，考虑一个独立的二元一次方程能不能得到解．以$x+y=8$为例，相加等于8的两个数字的组合有很多组：1和7相加等于8，2和6相加也等于8，3和5也可以，如果再算上小数分数，相加等于8的两个数的组合就有无数个．请注意，这个时候不能说一个二元一次方程无解，而应该说它有无数个解．为什么有无数个解呢？如果把x从方程的左边移动到右边，变成$-x$，那就是$y=8-x$，这就表示对于任何一个x而言，只要用8减去它就可以得到一个y，这两个数在一起，加起来一定会等于8，所以，一个二元一次方程中有两个未知数，是不能得到唯一解的，因为它只是描述了两个变量之间的相互关系．

为什么两个独立的方程联合在一起就有解了呢？因为另一个方程同样可以得到这样一组对应关系，比如在$x-y=2$中，我们同样可以得到$y=x-2$．虽然对于任何一个x，都可以找到一个y满足这个方程，但是，要同时满足这两个方程就不那么简单了．我们随便拿一组满足方程①的数字，代入到方程②中就会发现，结果并不一定相等，比如$1+7=8$，但是$1-7$却不等于2．因此要想同时满足两个方程式，就必须想办法把这两个方程式联合起来，把一个方程里有两个未知数的等式变成只有

一个未知数的方程．但具体要怎么联合呢？有两种办法．

第一种办法是利用代数的基本性质．我们知道，一个变量不仅可以代表数字，而且可以代表一个算式，比如，在第一个方程中，我们得到了$y=8-x$，也就是说，用$8-x$这个算式就可以代替第二个方程中的y，得到$x-(8-x)=2$，只要把这个方程中的x求出来，整个方程组的唯一正确的解就找到了，这种方法叫作代入消元法．代入指的是把一个方程中的y等于多少x代入到另一个方程中，消元指的是消去一个未知数．

在此题中：$x-(8-x)=2$，括号外边是减号，去括号后8和x需要变号，得到$x-8+x=2$，化简得到$2x-8=2$，然后把-8移动到右边变成$+8$，得到$2x=2+8$，即$2x=10$，两边除以x的系数2，得到$x=5$，那么y呢？化简之前我们知道$y=8-x$，把$x=5$代入该算式得到$y=8-5=3$．

以上就是二元一次方程组的第一种解法——代入消元法．也就是把两个独立方程中的任何一个，先化简成y等于多少x的形式；再把这个等式代入到另一个方程中去，求出x的数值；最后，再把x的数值代入这个y等于多少x的等式中，得到y的数值．当然，在实际处理问题的过程中，把x表示为多少y的形式也是可以的．这种方法利用的是代数的基本特征．

接下来，我们再研究一下第二种解法．

我们知道，等式具有协变性的特征，如果把这两个方程组看成一个整体，就可以直接在它们之间实现加减乘除的运算．因为等式左右两边同时加减相等的两个数以后，等式仍然成立，所以，可以让第一个方程的左边加减第二个方程的左边，再让第一个方程的右边加减第二个方程的右边，等式一定仍然成立．下面，就用这种方式求解一下原来的方程组：$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

如果我们将方程左右两侧同时相加，得到$x+y+x-y=8+2$，化简合并，得到$2x=10$，消去x的系数2，得到$x=5$．如果我们先将方程左右两侧相减，就会得到$(x+y)-(x-y)=8-2$，去括号，得到

$x + y - x + y = 6$，化简合并，得到$2y = 6$，消去y的系数2，得到$y = 3$．

由于这种办法需要在两个方程式之间相互加减，所以又叫加减消元法．

根据上述分析，好像用加减消元法要简单一点，其实也不一定，用哪种方法更简单，主要取决于方程组的具体形式．

比如方程：$\begin{cases}4x-2y=2x-3,\\ y-3x=5.\end{cases}$ 在这组方程中，x、y都分布在方 = 5．程式的两边，而且系数也不一样，通过简单的加减并不能实现消减变量的目的，所以还是用代入消元求解法更简单．不过，如果方程组的系数差的不多，或者正好是整数倍，还是可以利用加减消元的．

比如：$\begin{cases}2x+2y=5,\\ 6x-y=2.\end{cases}$ 在这组方程中，x的系数一个正好是另一 = 2．个的3倍，y的系数一个正好是另一个的 - 2倍，所以我们就可以先在第一个方程的左右两侧，同时乘以3，得到$6x + 6y = 15$，然后再和第二个方程相减，这样就可以消除变量x．也可以把第二个方程左右两边同时乘以2，得到$12x - 2y = 4$，然后再和第一个方程相加，这样就可以消去变量y．

最后，总结一下解二元一次方程组的方法：二元一次方程组求解的关键是消元，消元有两种办法——代入消元和加减消元．具体使用哪种办法根据方程组的形式而定：如果同一个变量的系数相等或者相差整数倍，就优先使用加减消元法；如果方程中有一个未知数只出现了一次，而且系数是1，就优先使用代入消元法．

二元一次方程是从小学到初中阶段学习的第一个有实用意义的数学模型，一些在小学阶段看起来有难度的问题，都可以通过二元一次方程组轻松地解决．比如鸡兔同笼问题、绳长和井深问题、两数和差问题．不过我们学来学去，却常常会产生这样一种感觉：这一类应用题，好像是数学老师特地为了刁难学生而出的．比如鸡兔同笼问题，在实际生活中，怎么可能有人不数鸡有几只兔子有几只，而去分别数脑袋和腿呢？那么，这类问题有没有实际用途？

◎ 生活中的二元一次方程：列个方程组解决一切问题

二元一次方程有什么实际用处吗？不管是在工作学习中还是在生活中，不管是赚钱时还是消费时，这类问题几乎随处可见．不信，你就试试．学习了这么久了，我们也应该出去玩玩了，开车来一趟自驾游怎么样？

假如我们有5000元的预算，准备要出去玩5天，那么这个钱我们应该怎么花呢？你可能会说："花钱还不容易，用得着二元一次方程吗？"可是我们一共就只有5000元，一路上既要花路费，又要花住宿费、餐费，还得支付景点的门票钱，到底怎么分合适呢？如果没有计划，第一天就把钱花光了，后几天就只能"喝西北风"了，对不对？所以必须要有个计划．

首先，吃饭和住宿，差不多都是固定的钱．假设：住宿一天200元，4天就是800元；吃饭1天100元，5天就是500元，从5000里边把这些钱扣除出去，一共要扣除1300元，还剩3700元，这就是路费和景区的门票．你会问这路费和景区的钱怎么分呢？我们光跑高速不进景区，那不叫自驾游，那叫兜风！如果光进景区不走路，那不就只能围着自己的小区转悠了吗？所以我们的时间大致应该是走一半逛一半．那钱应该怎么分呢，难道是3700元平分成两半吗？不对，因为走路钱花得多，每天就得300元左右；而景区的门票花钱少，大概1天也就平均200元．如果两边时间差不多的话，应该是路费除以300元等于景区的钱除以200元，这样就得到了第一个方程式，同时我们又知道这两部分钱加起来等于剩下的3700．于是就得到了这样一组方程：$\begin{cases} x+y=3\ 700, \\ \frac{x}{300}=\frac{y}{200}. \end{cases}$

现在来求解这个方程组：第二个方程左右两边乘以600，化简一下，得到$2x=3y$，再把第一个方程左右两边乘以2，得到$2x+2y=7400$，$3y$ 替换掉这里的$2x$，得到$5y=7400$，消去y 的系数5，得到$y=1480$．

还不错，这些钱够玩几个好一点的景区了，当然这只是一个大概的估算．真要到玩的时候，得选好了景区、定好了路线，景区和路线一旦选好了，就意味着路费和门票的钱都确定了，然后可以反过来细算一下，餐饮住宿费用究竟要怎么分配．这就是二元一次方程在生活中的具体用处．这个问题属于预算问题，解决给你一些钱怎么花费最合理的问题．常用的解决办法就是，先满足最基本的需求，而不是那些最重要的需求；然后再按照一个最合理的比例，去考虑最重要的需求如何满足；最后再把剩余的钱，按比例分配到其他的地方．

接下来，该说点赚钱的事儿了．

假如我们开了一家猪肉店，有一天买进了300千克猪肉，进价是12元一千克，现在要把它卖掉，希望每千克能赚3元钱，这个账目很容易算，只要每千克卖15元就可以了．但是问题在于，我们不能统一定价．因为在市场上，肥肉普遍不受欢迎，大多数人只愿意买瘦肉，为了把肥肉和瘦肉都卖掉，就把瘦肉的价格定得贵两块钱．瘦肉贵了以后，买瘦肉的客户自然会减少一点，买肥肉的客户就会多一点，这样才能把肥肉瘦肉一起卖完．现在我们把肉分出来了，肥肉180千克，瘦肉120千克，请你来定个卖价．这个问题怎么解？我们同样是先假设肥肉x元／千克，瘦肉y元／千克．由于瘦肉要贵两元，所以我们就得到了第一个方程：$y=x+2$①，另一个方程就是猪肉的总价格：$180x+120y=300\times15$②．

解这个方程组，我们把方程①直接代入到方程②中得到$180x+120(x+2)=4500$，化简合并得到$300x+240=4500$，移项得到$300x=4260$，消元得到$x=14.2$，y比x大2，所以$y=16.2$．

这是卖肉的时候如何根据利润来调配价格的问题，这类问题属于销售计划的问题．大多数公司每到年底，都要做明年的销售计划，公司的老板往往都会根据自己的感觉定出一个大概的销售收入来，然后要求销售负责人把这个计划的收入任务拆分到各个部门或者各个产品线里面去．虽然老板这个数字是拍脑门定的，但是你要做详细计划的时候就得有条不紊，就需要借助这个多元一次方程组的帮助．当然，做销售计划也不是一次性就能完工的，需要不断调整、不断修正，逐步接近真实的

情况．

关于挣钱和花钱的事情，跟一个中学生也没多大关系，我们还是抓紧学习吧．话说期末要放假了，家长给你2500元，让你去报学习班．你需要报英语和历史两个学习班，因为你的历史比英语强一点，学英语的时间应该是学历史的1.5倍，换句话说，你报英语班要用的钱是报历史班的1.5倍，那么，这些钱你应该怎么分配呢？这个问题看起来比卖猪肉简单多了．我们假设学英语需要用x元，学历史要用y元，根据总金额不难得出$x+y=2500$①，再根据英语班和历史班的比例，得到$x=1.5y$②，这样一个方程组就得到了．我们把方程②代入方程①，得到$1.5y+y=2500$，合并同类项，得到$2.5y=2500$，消元，得到$y=1000$，即学历史用1000元，不难得出学英语的钱数$x=2500-1000=1500$．

通过上述三个例子，我们发现：无论是在工作、生活中还是在学习中，二元一次方程都是无处不在的．我们每一天的时间是不是都可以用来做两件不同的事儿呢？我们花出去的每一份钱是不是都可以买两种不同的东西呢？我们工作的具体方式方法是不是也可以有两种以上呢？甚至我们和两个朋友之间的亲密关系是不是也需要做一个选择呢？每当遇到这种选择的时候，很多宣传心灵鸡汤的人都只告诉我们，应该问问哪一个选择才真正符合你的意愿．其实，当你面临两个相互冲突的选择的时候，背后都有一个隐藏的规律．只要你把它找出来，列个方程组，问题就可以迎刃而解了．

生活中的二元一次方程组就讲到这里，接下来学习数学应用题的解题思路，它可以让我们以不变应万变地解决所有难题．

九　学习方法和解题思路

◎ 通用的解题思路：不断试错，不断修正

能够解决所有难题的通用解题思路是什么呢？那就是：不断试错，不断修正，笔耕不辍，其解自得．我们就先用这种办法解决一个工程技术难题，让大家领略一下这种方法的神奇魅力．

话说有一年黄河发大水，把上游的一个大树桩冲到了下游，这个树桩的树根深埋在河泥里头，树干直直地伸向水面，但是又刚好藏在水平面以下，从水面看去是什么都没看到的，但是船一走到这个地方，“砰”的一声就撞翻了．请问应该怎样把这个树桩挪走？这个问题一听就让人头疼，树根深埋在河泥下，挖起来肯定非常困难，那应该怎么办？

我们可以先试错：现在活不好干是因为有水，那我们把黄河里的水都放出去，树桩不就露出来了吗？然后就能把它挖出来了．可是我们怎么把黄河的水放出去呢？很简单，把黄河大堤扒了就行了．可是一定有人会说了：你这是什么损招，我们挪树桩的目的就是为了百姓方便，你把黄河大堤扒了，老百姓都淹死了，挪树桩有什么用？

别急，这个方法行不通不要紧，我们可以继续往下修正，为了防止百姓被淹，我们可以在扒黄河大堤之前，在旁边修一条新的黄河大堤出来，这样，旧的大堤扒掉了，水跑出去了，新的大堤又把水挡住了，老百姓就不会遭殃了．可问题是，修一条黄河大堤，十年二十年也干不完，为了一个树桩费这么大劲，太不值得了，怎么办？那就继续修正．

修一条大堤不行，那我们可以在这个树桩的附近圈出一条小堤来，只要把这个树桩附近的水都围住了，能够让我们把水抽出去，不就成了吗？这个思路可行，但真正操作起来，却无法实施！黄河水流非常湍急，把石头和沙袋一扔到水里，它们就被冲走了，根本行不通，那怎么办？别着急，可以继续修正．土石挡不住水，还有什么能挡水？可以用木板围成一个巨大的木桶，把这个树桩从上到下套起来，套到底下以

后，把木桶压到河泥里面，然后再把大木桶里面的水抽出来就可以了．这就没错了，这个办法就是古人在1000多年前发现的水下工程作业的标准方法，直到现在，水利工程作业中还一直沿用．

瞧见没有，一个跟数学毫无关系的水利工程问题，也可以通过不断试错、不断修正的方法，得到解决答案．举这个例子的目的，当然不是介绍水利工程，而是为了证明：不断试错、不断修正的办法是解决一切问题的通用办法．接下来，我们就用这种办法来解决经典的鸡兔同笼问题：把鸡和兔子关在一起，它们共有20个头，60只脚，问鸡和兔子分别有几只？

我们现在知道，它只是一个简单的二元一次方程组问题，如果自己完全没有解题思路，我们应该怎么办呢？不断试错就行了．写不出算式、写不出答案不要紧，我们可以写一些“不完全符合题意，但是却和题目相关的数字”．

我们先在草稿纸上写下需要计算的内容，有鸡和兔子，再在鸡和兔子的下面分别写上头和脚，然后再在鸡和兔子的右边写上和，在和的下面也写上头和脚，这个分别表示鸡和兔子头一共有多少个、脚一共有多少只，然后尽量贴合题意地往下写．比如，一只鸡有2只脚，我们就在鸡头和脚的中间写上“×2＝”，这是什么意思呢？这表示鸡头的数量乘以2等于鸡脚的数量；同样，兔子有四只脚，也在兔子头和脚之间写下“×4＝”．写完这些数字，继续回顾题目，写下更多的与题目相关的数字，比如看到鸡和兔子的头一共有20个，那么，如果有1只鸡，肯定应该有19只兔子了，写下19只兔子，19只兔子有多少只脚呢？当然是19×4＝76只脚．然后继续回顾题目，发现鸡和兔子的脚还要求和，那么我们算一下2＋76，一共是78只脚．而题目要求的是60只脚，显然1只鸡和19只兔子不是这个题目的答案．不要紧，把这一行数据整理出来写清楚（见表9－1）：

表9－1

鸡		兔		和	
头	×2→ 脚	头	×4→ 脚	头	脚
1	2	19	76	20	78

续表

鸡		兔		和	
头	×2= 脚	头	×4= 脚	头	脚
2	4	18	72	20	76
3	6	17	68	20	74
4	8	16	64	20	72

而后分别写下鸡有2只、3只、4只的情况，同时分别计算得出其他数值．这不是在瞎蒙吗？这样一次一次地试下去，当然能找到答案了，但是这样找到答案有什么意义？不要着急，解题的思路要在这些数字中去发现．如果我们把所有的数字对齐，一列一列地去看就会发现：鸡的数量每次加1，兔子的数量每次就减1，鸡脚的数量每次加2，兔子脚的数量每次减4，脚的总数呢，每次减2，为什么呢？因为每增加1只鸡就减少了1只兔子，减少的那只兔子比增加的鸡多2只脚，因此，脚的总数就每次减2．我们现在没有找到答案就是因为脚的总数不对，按照每次减2的规律，减多少次就能达到60只呢？于是，解决问题的关键思路就被我们从一堆数字中发现了：先假设20只动物都是兔子，结果就是80只脚，每增加1只鸡就会减少2只脚，此时我们就看一下题目中的60只脚比80只少了几只脚，最后用少的脚数除以2，得到的就是鸡的数目．也就是鸡的数目等于（$20\times4-60$）÷（$4-2$）$=20\div2=10$（只），而兔子的数量则等于总数$20-10=10$（只）．这样我们就找到了问题的答案．

这里着重讲述的并不是鸡兔同笼问题怎么求解，而是世界上任何一道数学题的通用解法，这种解法就是：在弄清题意的基础上，先给出部分符合题意的一组数据；然后按一定顺序陆续给出一个系列的数据；再从这些数据序列中反复观察、发现规律，把其中不符合题意的那部分数据的变化规律找出来；最后利用这个规律，求得最终的答案．当然，真正的求解过程并不会一帆风顺，很可能会陷入原地打转的死循环．但是不要紧，继续寻找题目中的其他条件，从头开始，只要思路无误，反复推算，最终一定可以得到正确答案．

笔耕不辍，其解自得！世界上最通用的解题办法你学会了吗？你可能会说了，找一堆数据来找规律，这个方法是不是笨了点呢？的确是这

样，正因为它是最通用的办法，当然也就是最笨最慢的办法了，不过它也有三方面的好处：第一，可以磨炼我们的耐心和毅力；第二，可以让我们熟练掌握已有的知识；第三，还能让我们触类旁通地掌握与此相关的一些问题．但是，我们还想问一句，有没有比它更好更快的办法呢？当然有了！

◎ 更好、更快的解题思路：在知识之间建立关联

在前文中，我们详细介绍了解决所有问题的通用思路，并发现这种方法虽然通用，但是却是最笨、最慢的办法．为什么我要先介绍这么一种方法？很简单，因为解决任何问题，都需要我们有主动学习的精神，有面对一切难题的勇气，有长时间面对一个问题的毅力．除此之外，还有没有更好更快的解题思路呢？当然有了，不过，在介绍这个思路之前，我们首先要弄明白：为什么会有人做题快，有人做题慢呢？

当我们面对一道数学题的时候，常常出现这样两种情况：第一种情况是，觉得题太简单了，一看就会，三下五除二就做出来了，可总是会遗漏点东西，因为马虎而做错了．第二种情况与之相反，题从来没见过，丈二和尚摸不着头脑，看了半天，一直找不到思路，可是，一旦看到答案，瞬间就会恍然大悟：不就是这么简单吗？我当时只是有一步没想到而已．可问题是，下次再遇到类似的题目，还是不会！在这两种情况中，会的题目因为马虎而做错了，不会的题目却一直学不会，为什么会有这种现象呢？

因为每个人都有高估自己的习惯，开车刚拐了一个弯，就以为自己学会了；一个数学定理，刚会用一种方法证明，就以为自己弄懂了，不好好听老师讲课了．这种做法，跟那个写字只会画横线的地主的傻儿子有什么区别呢？因此，要想做到快速准确地解题，必须要做到两点：第一，要把所有基本的数学知识融会贯通；第二，要保持一个谦虚谨慎的态度．

你以为自己不会做的只是某一道数学题吗？错了！你不会解题过程中的某一步，原因是你没有熟练地掌握支撑它的公式和定理．我们怎么样做才能够扎实熟练地掌握数学知识呢？知识掌握得熟不熟练，关键不在于你背了几遍，而在于这个知识跟哪些已学的知识取得了关联．在知识之间建立的关联越多，我们掌握得就越扎实，运用得就越熟练，一个定理要用多种方式证明，一道数学题要用多种方法求解．千万不要以为反复做一道题是浪费时间，因为只有这样才能让我们的数学知识大厦基

础更加牢固，为什么我的课程要从数数讲起，要仔细分析$1+1=2$的道理，要反复剖析加减乘除的规律，就是要夯实知识基础．只要熟悉了等式的协变性，讲到解方程的时候很快就轻松搞定了，这就是把知识融会贯通以后的自然结果．

第二，要随时保持谦虚的态度，保持严谨的作风．有人仔细对比过德国汽车工人和我国工人在修车的过程中干活的特点：德国工人做事特别死板，干活总是不急不忙的，工具摆放得特别规矩，拆下来的零件摆放得也非常整齐，要知道，摆放东西也是会消耗时间的．而中国工人上来就干活，三下五除二就能把车拆完了，十几分钟就把车修好了，可是把零件往回装的时候，一会儿找不到扳手了，一会儿又找不到螺丝了，好不容易装好了，最后发现，不知道从哪里又多出来了两个零件．没办法，还得拆下来，找找这零件是哪儿的，再给装回去．得亏这是汽车，它经得起折腾，这要是给病人做手术，谁能受得了．看了这个例子，我们回想一下自己做题的时候，是不是一遇到简单的题目就不当回事儿了，是不是自己的草稿纸上总是画得乱七八糟呢？以后我们可得记住了：勿因题难而焦虑，勿因题易而轻浮．

更好、更快的思路只不过就是一个态度的问题！第一，就是要保持谦逊的态度，把那些最简单最基础的数学知识全面融会贯通；第二，就是要保持谨慎的作风，按照标准的思路，一丝不苟地把过程梳理出来．把这两步组合起来看就像我们穿衣服，只要我们把领口的第一个扣子系好了，再按照严格的顺序，顺着衣襟一个一个地扣起来，衣服不就穿好了吗？如果在中间的时候马虎一下，系错了一个扣子，那这下面的扣子可就全错了．穿衣服很简单，做数学题也很简单，关键是能不能在简单的问题上，保持严谨的作风．什么叫困难？把简单的步骤层层叠叠地积累起来，就是困难．什么叫伟大？把简单的事情全部都做好了，就是伟大！

之所以在研究一个更好更快地解决问题的思路的同时，提到学习的态度问题，是因为态度是解决一切问题的基础．

◎ 让知识融会贯通：分类和搭建

要想更好、更快地解题，就必须拥有谦虚的态度和严谨的作风，而且要把这些基本的知识都融会贯通．那么，怎样才能使自己的知识融会贯通呢？

很多人把数学当作工具来看待，我不赞成．数学在我的心目中是一块圣地，我对数学是充满了感情的，怎么能把它比作工具呢？为了讲清楚数学知识是如何融会贯通的，暂时把一条一条的数学知识当作工具来看待．我们的脑袋就像是工具箱，里边装的数学知识就是扳手、钳子、螺丝刀等各种工具．当我们解题的时候，就相当于从工具箱里把这些工具一个个翻出来，拧一拧、转一转，就把问题解决了．那么数学知识之间的融会贯通，就是我们脑袋里的这些工具怎么样摆放的问题．

我们都见过东西摆得乱七八糟的场景：混乱的地面、桌面，混乱的衣柜、抽屉，混乱的书包、铅笔盒，当我们想从中找个工具时，往往会浪费很多的时间．因为这些东西没有清晰的分类，找起来就很费劲．如果我们脑袋里的数学知识也是这么乱七八糟的，做起数学题来也很费劲，每做一道题甚至每往下解一步，都得把脑袋里的所有数学公式都翻出来，一个个对比，看看这个公式能不能用，那个定理好不好使，如果题目当中有好多条件，那就更费劲了．那怎么办？把知识归置一下，分门别类地摆放．

第一步，要把知识分门别类．这个是解一次方程时用的，那个是求面积时用的，这个是分数化简时用的，那个是列方程时用的．我们可以在脑子里过一遍这些公式定理，更好的办法是在纸上画出分类图．不过我要提醒你一点，具体画成什么样无所谓，但千万要自己画，不能从网上去复制．为什么呢？因为我们要的不是这张图，而是这个画图的过程．自己画图的时候，就是在梳理已有的知识，而复制别人图的时候，那是在增加新知识．现在就是因为自己脑袋里的知识太多太乱了，需要整理干净的时候，你不好好整理，还往里增加新知识，这不是给自己添乱吗？这就好比我让你把书包收拾整齐，但你却又买了一大堆整齐的书来，你原来那个书包里头还是乱的．只有自己动手，才能丰衣足食．把

知识分完类，只是达到了让知识融会贯通的第一层境界．绝大多数人的脑袋里，本来就会给知识做一个简单的分类．比如当你做数学卷子的时候，不会想起英语的语法知识；当你解三角形的时候，也不会想到圆的面积．所以第一层境界，其实很容易达到．如果你想做得更好更快，仅仅把知识分类总结，是远远不够的．这个世界根本就不存在一个完美的分类方法，如果我让你做出一张世界上最好的分类图来，你就会发现，无论这个图怎么画，总可以继续优化，可以画得更好．更麻烦的问题在于，无论你按照什么分类去分，你的分类图也总有缺点．我们不妨以书架为例来分析一下分类的难度．

比如，要把自己学过的所有书整齐地分好类，放到一个书架上去，最完美的分类方法应该是怎样放呢？是应该把每个年级的书都放在一起呢？还是把每个科目的书放在一起呢？还是按照课本、练习册、课外书的分类方式把书放好呢？无论我们怎么分类都对，但怎么分类也都有缺点，你要是按年级分类，如果需要按科目找那就不好办了．这就是分类法的局限性．我们应该怎么办呢？

我曾经要求把每一个定理都通过多种方法加以证明，这是在不断加深知识之间的相互关联，那些在第一层境界中被分门别类的知识，会在我们反复求证、反复证明的过程中，建立无数的关联．这种做法会让我们把一个平面的知识分类图变得立体起来．每一个证明方法，就如同知识之间的纽带，让所有的知识都活灵活现地关联到一起，这样一来我们就进入了知识融会贯通的第二个境界，叫高楼叠起！达到这一层境界之后，所有的知识都从书本上站起来了，那些定理之间的证明方法就像一栋大楼内的钢筋架构一样，牢牢地把整座数学大厦支撑了起来．

如果仍然用书架来做类比，我们就可以认为自己搭建了一个立体的书架．比如，我们在水平方向上分几层，把每个年级的书水平地摆放，然后，再在垂直的方向上划分几列，每一列用来放一个科目，最后，我们的书架还有前后三排，第一排用来放课本，第二排放练习册，第三排放课外书．这样一来，分类是不是就比原来清晰了很多呢？把一个领域的知识反复地用不同的方法分类，再把知识之间的关系全部建立起来，这就是在搭建自己的知识架构，这就是为什么我在讲代数的时候，不但讲了代数是什么，而且按照变量、等号和加减乘除分别对代数知识进行

分类的原因．

俗话说，山外有山，天外有天．要想把所有知识融会贯通，还得更上一层楼，那又是怎样的境界呢？

◎ 更上一层楼：忘掉知识的具体形式，只看本质

俗话说，欲穷千里目，更上一层楼．在前文中，我们提到了学习数学的两层境界，第一层是在自己的头脑之中把数学知识分门别类绘制成分类图；第二层是要反复建立知识之间的关联，把平面的分类图变成立体的知识架构．接下来，就再上一层楼，为你介绍学习数学的第三层境界．

当把所有数学知识搭建成一个立体的大厦以后，还能怎么提高呢？我们学数学的目的，不是把现有的数学知识堆积起来，而是要用这些知识去解决具体问题．解决问题的关键在于学以致用、活学活用，要理论联系实际才可以．再打个比方，无论是我们画出来的分类图也好，搭建起来的数学架构也好，那都是固定的东西、死板的知识．有没有一个办法能把这个数学大厦建成活的？有！请看正在建设高楼的起重机就是活的，如果我们在一个固定的大楼上找东西，就得自己跑来跑去．但起重机自己动起来，会把我们需要的东西抓起来，一转身就送到我们跟前了．也就是说，如果能够把这个数学知识学成活的，那么一遇到问题的时候，这个定理就冒出来了．

会有这么神吗？当你在大街上遇到一个熟人的时候，你一瞬间就知道他是谁了．那么，我们凭什么不可以一瞬间就找到一道数学题的解法呢？关键是怎么学习才能达到活学活用的境界呢？怎么做才能把这个数学知识的大厦变成一个数学知识的起重机呢？很简单，把你头脑中的数学知识，把你眼前的数学题，进一步抽象，忘掉知识的具体形式，只看它的本质，只看它的关键点．

对于同一个现象，每一个人都有着不同的观察角度、不同的关注点，同样看美女荡秋千，普通人关注的是美女，而伽利略思考的是秋千的摆动．如果你能像伽利略那样，当你解决问题的时候，知识就会信手拈来．天下所有的数学题，无非就是变与不变、等与不等．只要抓住了这个本质，你就会觉得书越读越薄，知识越学越少，题目越做越简单．正因为如此，我才会反复强调，数学是认识这个世界的普遍规律．

我们曾经用书架来比喻数学知识的架构，第一层境界是平面的书架，第二层境界是立体的书架，第三层境界是智能的书架．只要我们随便把一本书放在书架上，它自己就自动分类；只要我们跟它说需要什么书，书架自动就把书推送出来．真正的数学知识架构不应该像钢筋水泥一样僵化，而应该像百变的魔方一样随心应手、变化自如．

学习数学达到第一层境界的人，就已经会解决所有学过的问题了，只不过他解题的速度很慢，所以平时考试也就考七八十分；达到第二层境界的人，能够系统地掌握数学知识，考试能考八九十分；达到第三层境界的人，做什么事情都是随心所欲，偶尔考个九十多分还是因为马虎大意．那么这就是学习数学的最高境界了吗？仍然不是！因为我说过，数学分数不是衡量数学能力的唯一标准，在活学活用之后，还有更高的境界．

在必要的情况下，能够把问题本身也变活了；在解决实际问题时，能够一眼洞穿题目的核心，迅速发现问题的本质！同时，我们还需要知道：真正的数学知识并不在书本上，而是在实际生活中；最难的问题也不是解决问题，而是发现问题．因此，更高境界的人不但具有把书看薄的本事、有看穿一切数学知识的洞察力，还要有洞穿整个世界的能力：他要具有发现问题的本领，能够从看起来不是问题的地方发现问题；他要有分析问题的本领，要在解题之前一眼就能看穿一道数学题到底有几种解法；至于解决问题，那只不过是水到渠成的事情．

怎么样才能达到这样的境界呢？放下手中纸质的小书，打开现实世界这本大书，从世界的纷繁变化中，去感受不变的规律．只有看懂了世界这本大书，才能具有改变世界的能力．如果把数学知识体系比作书架，达到第四层境界的时候，它直接就变成机器人了，根本就不用你开口要书，它一看你的表情动作、一分析你的心情，就知道你想看什么书了，它直接就读到你心里了．要想达到这样的境界，只有一个办法：认真观察生活，理论联系实际．正因为如此，我才精挑细选了一些工作和生活中的实际问题，带领你一起感受数学的魅力．

我们分析了把知识融会贯通的四重境界，它们分别是：平面的知识、立体的知识、活着的知识、活动的世界．数学知识是从世界中抽象

得来的，要想让知识发挥作用，还需要回到世界当中去．还有没有更高的境界呢？当然是有的，因为学无止境．不过也不必好高骛远，只要跟着我们的课程节奏，慢慢学习，逐渐领悟，保持毅力，勤加练习，一定能够在最短的时间内把初中数学知识融会贯通，掌握数学的真谛．如果你能把知识变活了，你就变成知识的主人；如果你能够把世界变活了，你就能变成世界的主人．

记得我在第一次看见计算器的时候，立刻就被它吸引了，当时觉得这个东西实在太神奇了，不管让它算什么数字，只要轻轻一按，它瞬间就算出来了，为了挑战计算器的极限能力，我一顿狂按，连续输入了一排9，然后再让它乘以一排9，当我按下等号以后，这个计算器显示的却是“9.9999E16”，当时我以为，自己把这个计算器给难倒了，这么大的两个数字相乘怎么可能等于9.99呢？直到很久以后我才明白，人家计算器根本就没算错，那么，这个“E16”是什么呢？带着这问题，我们继续下一章节的学习．

十　指数和乘方运算

◎ 神奇的指数：几何级数的变化

当我提到学习数学的目的时，曾经反复提到一句口号，那就是认识世界、改变世界．自从人类进入信息时代，“改变世界”这句口号简直是铺天盖地，仿佛人人都高喊着：“我要改变世界！”可是，你知道我们生活的这个世界有多大吗？根据科学家最新的研究显示，我们生活的这个宇宙是从137亿年前的一次大爆炸开始的，按照经典物理学来解释，现在宇宙的尺度就是137亿光年，但是也有观点认为，这个宇宙的直径要达到980亿光年，甚至1800多亿光年．

光年是什么单位呢？光年就是光在一年之中走过的距离．具体有多远呢？我们可以计算一下，光在一秒钟就能走30万千米，绕地球跑个七八圈，那么一年有365天，一天是24小时，一小时是3600秒，把这些数字全部都乘起来大概就是9.5万亿千米．如果用最小的137亿年乘一下，就得到了宇宙的直径是1301万亿亿千米．我们都知道一万如果写下来就是1后头4个0，一亿是1后头8个0，这个宇宙的直径要写出来，那就得是在1301的后头再写上20个零，这么多个0，累不累？不但写的时候累，而且看的时候眼睛也晕，那怎么办？这个宇宙真就这么大，总不能因为写着不方便，就把这个宇宙缩小吧？那么我们的宇宙里又得有多少个星系？每个星系里面又有多少颗星星？每颗星星上面有多少吨石头呢？如果把这些数字都写在纸面上，就不用干别的了，光数0就行了！像这类远超出我们想象力的巨大的数字，常常被人称作天文数字．

究竟要怎么表示它们呢？好办！不就是数字后边的0太多了吗？干脆就不写那么多0了，直接就写出来它后面有几个0就行了．比如：一万，在1后面有4个0，那就写成10的4次方；一亿，因为1后面有8个0，就写成10的8次方．把这个0的个数，变小一点写在10的右上角，像小手指头一样在那里戳着，所以把这个数叫作指数．那么，在指数底下的这个10呢？就受点委屈，谁让它在底下呢？干脆它就叫作底数吧！那么底数和指数是什么关系呢？这个指数表示的是有几个底数相乘．

由底数和指数组成的这种计算方法，叫作乘方，它是在加减乘除之后的第五种计算方式．虽然乘方的本质也是乘法，但是它却不是直接把这个底数和指数乘起来，而是让底数自我相乘，乘几次呢？指数是几，它就乘几次，这种表示方法倒有点像乘法，乘法的本质是加法，但是呢，它却不能直接把两个乘数加起来，而是表示让第一个乘数自我相加，加多少次呢？后面一个数是几，就加上几次．乘方也是这个道理，这指数是几，底数就要自我相乘几次，这种相乘以后的结果呢，又叫作幂．接下来，我们就来分析一下这个神奇的指数．

对于乘方运算，其实并不陌生，我们早就学过平方了．比如：$2^2=4$，$10^2=100$．

我们还知道，10^3 就是3个10相乘，结果等于在1后边加3个0，等于1000；同理，10^5 就是1后面5个0，当然就是100000了．如果是20万怎么表示呢，也好办，用2×10^5 表示就行了；那43万呢，就用4.3×10^5 表示．像这种用一个整数位的数字乘以10的几次方的形式表示数的方法，我们管它叫作科学记数法．这种办法经常用在科学研究的领域里．在计算器和计算机里，常见的数字都是用浮点型来表示的，如果得到一个很大的数字，结果往往显示的是几点几几后边跟着一个字母E多少，这个E后边的数字，表示的就是前面的数字乘以10的多少次方．

在学习乘方之前，我一直以为这个世界上增长最快的算法就是乘法了，比如10＋10的结果才等于20，但是10要是乘以10，一下就变成100了．但是乘法如果跟乘方相比，那真是小巫见大巫了，人家10的10次方，那可是100亿．是不是只有10的乘方厉害？如果是2的乘方，是不是就不会那么牛气了呢？你看这2的2次方，跟两个2相乘没什么区别，它们的结果都是4．你还别说，要说这个2，它确实挺2的，无论是2＋2，还是2×2，还是2的2次方，结果都等于4．那么是不是指数变大了，也没多少用处呢？要想知道这2的乘方有多厉害，我得给你讲三个故事：第一个故事是杀人的故事，第二个故事是生人的故事，第三个故事是造人的故事！

在古代的印度，有一个聪明的大臣，给国王发明了一种游戏，叫作国际象棋，这个国王很喜欢，打算赏赐他点金子，可

是这个大臣说："陛下，我不要金子，只要您给我一点麦子就行了．"国王一听："行，麦子有的是，你想要多少？"大臣就说："您看见这个棋盘了吗，请把第一个格子里放一粒麦子，第二个格子放两粒，第三个放四粒，总之，下一个格子比上一个格子的麦子多一倍，只要能把这个棋盘填满就可以了．"这国王心想，整个棋盘一共才64个格子，能摆放多少麦子？给他！于是，大臣们就开始尝试往这个棋盘上放麦粒，这一放不要紧，国王发现，就是把全世界的麦子都给了他都不够！那怎么办？话已经说出去了，总不能言而无信啊，于是国王就找了个借口，说："你这个家伙，衣服上的褶子实在太多了，对我太失礼了！来人，把他给我砍了！"于是就把这个大臣给杀了．

那么，如果麦子摆完到底有多少粒呢？$2^{65} - 1$粒，算出来大概是3700万亿粒．听到这儿你可能会想，这64格的麦子有那么多吗？别着急，要想知道这个2的厉害，还得接着往下听！

不知道你有没有注意，你的好多同学都是没有兄弟姐妹的，甚至你的爸爸妈妈也是独生子女，你知道这是为什么吗？这是因为，我们国家在20世纪80年代开始实施计划生育，为什么要实施计划生育呢？这是因为18世纪，英国的马尔萨斯发现，在自然条件下，每对夫妻都可以生四五个孩子，全球的人口就会越来越多．假设现在有10亿人口，如果不加以控制，世界人口就会每二十几年翻一倍，这样只需要两三百年的时间，世界人口就会超过一万亿人，那样的话，整个地球都会被撑爆的．事实上远远等不到那一天，地球上的资源就会被耗尽，人类就会发生大规模的瘟疫或者战争．当然，马尔萨斯的人口论也存在一定的问题．但是，如果按照理论计算，结果的确就是如此可怕．

最后，我们再说一个机器人的故事．

你知道你手里的手机，桌子上的计算机是怎么来的吗？它们都是从又大又笨又慢的机器一步步演化来的，支撑计算机技术发展的，是一条被称为摩尔定律的规律．摩尔定律指出，每

过18个月，芯片的体积就会缩小一半，速度就会增加一倍，价格还会便宜一半，就这么一个简单的定律，在短短的几十年内，就使得像楼房一样巨大的机器，变成了日常生活中随处可见的手机．现在计算机硬件的发展已经接近极限，但是软件和人工智能的发展才刚刚开始．我相信，按照这样的速度发展，人类不久就会创造出一个全新的、由智能机器人组成的世界，而在此过程中，我们人类还能不能成为这个世界的主人，就取决于你们这一代人的智慧和能力！

指数运算，又被称作指数级的变化，或者叫作几何级数的变化，它的增长速度非常惊人，结果远远超出我们的直觉．比如我们要把一张普通的纸折叠一次，它就会加厚一倍，但是如果你反复折叠100次，它的厚度就会达到1.5亿千米，那是地球到太阳的距离．那么，如果指数运算和代数结合起来，又会产生哪些奇迹呢？

◎ 同底数幂的乘除：四个运算规则

我们继续探讨乘方在代数学里的运算法则．如果我们分别用两个字母来表示底数和指数，那么这样的代数式又会产生哪些运算规则？俗话说，有人的地方就有江湖恩怨，有数的地方就有加减乘除．既然这个指数是作为一个数字被放到底数的右上角，它也就逃脱不了加减乘除的使命．

我们先看一道简单的题目：$10^3 \times 10^4 =$？我们知道乘方源于乘法，10^3 就是3个10相乘，展开得到$10\times10\times10$．同理，10^4 就是4个10相乘，展开得到$10\times10\times10\times10$，两式相乘 $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$，一共7个10连乘，即$10^7$．

从中我们可以发现，当底数相同的两个乘式相乘时，只需要保持底数不变，把上面的指数相加就可以了．因为乘方表示的就是底数相乘的次数，所以当继续往后乘几个底数以后，只需要把这底数的个数相加就对了．如果用字母代替数字，用代数式表达就是$a^m \times a^n = a^{m+n}$．由于乘方的结果又被称作幂，因此上式变成口诀就是：同底数幂相乘，底数不变，指数相加．

如果把乘方的运算规律跟以前的规律对比一下就会发现，这个公式跟乘法分配律在形式上非常接近：$am+an=a(m+n)$．

与此相比，乘方运算把这个m、n 移动到右上角，变成了指数而已．其实这两个方程，不但是形似，而且是神似：乘法表示的是加法，am 就m 个a 相加，两个本质上是加法的算式相加，结果是把相加的次数合并．同理，乘方表示的是乘法，a^m 就是m 个a 相乘，两个本质上是乘法的算式相乘，结果自然也是把相乘的次数相加了．乘法分配律的成立前提，必须要有一个乘数相等；乘方的运算规律成立的前提，也必须要底数相同．

以上我们分析了指数的加法，再看看指数的减法．加法是由于两式的乘积得到的，那么很容易想到，指数相减表示肯定是除法．比如：$10^5 \div 10^3 =$？我们把乘法算式展开，得到（$10\times10\times10\times10\times10$）

÷（10×10×10），从5个10消去3个10，得到10^2．上式如果用代数式表示就是：$a^m \div a^n = a^{m-n}$．对应的口诀就是：同底数的幂相除，底数不变，指数相减．

其实这个指数相除的规律，即使不用验证也应该清楚．因为减法可以被视为加上一个负数，除法可以被视为乘以一个数字的倒数．从这个原理出发，我们自然就可以通过幂的乘法运算得到除法运算的规律．那么指数本身能不能是负数呢？如果把它和乘法对比一下就会发现：乘法后边的乘数，它表示的是还有几个数相加，既然在做乘法的时候可以乘以一个负数，那么乘方为什么就不能用负数当作它的指数呢？但如果指数是负数的话，它表示什么含义呢？

我们都知道正负数的含义是相反的，如果正数表示的是几个数相乘的话，那么负数就应该表示几个数字相除：假如10^2表示两个10相乘，那么10^{-2}就应该表示两个数相除，但是，拿什么当作被除数？拿10吗？不对！要搞清楚，我们当初用10^2表示两个数连续相乘的时候，是从什么数字开始的呢？我们在前面说过，这数字的老祖宗一个是0，一个是1，这0是加减法的起点，1是乘除法的起点．无论是什么样的加减算式，只要前面加上一个0，后边的数字就可以随便换顺序了；不管是什么样的乘除算式，只要前面加上一个1，后边的数字也随便移动．那么乘方运算究竟是应该归0管呢，还是归1管呢？由于乘方的本质是乘法，所以它自然是从1开始了．所谓$10^2=100$是指在1的基础之上连续乘了两个10，那么如果是－2次方呢？当然就只能在1的基础上连续除以两个10了：$1 \div 10 \div 10 = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$．

如果把底数10换成任意不为零的数字a，把指数2换成任意的数字n，也就得到了乘方的指数是负数的表达式：$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$．

指数是正数、负数的形式我们都研究清楚了，接下来再看看指数是0的情况，一个数的0次方是什么意思？有人说，任何数乘以0都等于0，所以任何数的0次方也应该等于0；也有人说，指数表示的是底数乘除几次，如果0次方表示的是一次都不乘，那么应该还等于底数自己．但是这个说法有问题，因为我们早就知道任何数的1次方才等于它自己；还有人说，这个乘方是从1开始的，因此任何数的0次方都应该等于1．那

么这个说法对不对呢？一个数的0次方到底等于几呢？

利用乘方运算的公式推导一下：$a^{m-n}=a^m\div a^n$，假设$m=n$，则有$a^0=a^{m-m}=a^m\div a^m=1$．不过要注意，在上述证明过程中，我们使用了除法，由于0是不能做除数的，因此，不能认为任何数的0次方都等于1．因为0的0次方是没有意义的．

我们学习了同底数幂乘法的运算规则，那就是：第一，同底数幂相乘，底数不变，指数相加；第二，同底数幂相除，底数不变，指数相减；第三，当指数是负数的时候，结果等于正数幂的倒数；第四，任何数的1次方都等于它自己，而除了0以外的任何数的0次方都等于1．那么指数的乘除呢，又会带来哪些变化？

◎ 幂的乘方：商的幂等于幂的商

接下来，我们再研究一下同指数幂的乘除法则，当底数不同、指数相同的时候，我们又应该怎么办呢？

比如：$a^3 \times b^3$ =？我们把乘方运算展开为乘法运算，可以得到$a \times a \times a \times b \times b \times b$，由于乘法存在交换律结合律，所以可以把$a$ 和b 位置调换一下，得到$ab \times ab \times ab$，3个ab 连续相乘，结果是$(ab)^3$，用任意数字n 代替指数3，就得到同指数幂的运算法则：$a^n \times b^n = (ab)^n$，运算口诀是：同指数的幂相乘，指数不变，底数相乘 .

由于乘方的结果叫幂，相乘的结果叫积，因此这个口诀也被简称为幂的积等于积的幂 ，同理，积的幂也等于幂的积 .

下面我们通过例题来感受一下，比如：$(2x)^4$ =？因为$2x$ 是2和x 的乘积，积的幂等于幂的积，因此$(2x)^4 = 2^4 \times x^4$，由于2的4次方等于16，因此结果为$16x^4$.

接下来我们再分析一下商的幂的运算规律．我们知道，除以一个数就相当于乘以这个数的倒数，所以商的幂的运算法则，自然也就能通过积的幂的公式推导出来：由于$a^n \times b^n = (ab)^n$，假设$b = \frac{1}{c}$，把$\frac{1}{c}$ 代入公式，得到$a^n \times \left(\frac{1}{c}\right)^n = \left(a \times \frac{1}{c}\right)^n$，把$a$ 移动到分子上面，化简得到$\frac{a^n}{c^n} = \left(\frac{a}{c}\right)^n$.

这就是同指数幂的除法公式，简称商的幂等于幂的商 .

接下来继续通过例题体验一下 .

比如$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = ?$ 此题处理的是分数的乘方，商的幂等于幂的商，直接把2次方扔到分子分母上，得到$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{3^2}{x^2} = \frac{9}{x^2}$.

以上我们研究了指数相同的乘方的运算规则．如果把它和同底数幂的运算比较一下就会发现：当同底数幂乘除的时候，底数不变，指数加减；但是指数相同的情况下，就只能在底数上进行乘除运算，指数本身

就不能加减了．那么如果一个乘方，再次乘方以后应该是什么结果呢？

比如：$(a^2)^3=$？把两个a相乘的结果，再连续乘方三次，那会是什么结果呢？仍然把乘方运算展开为乘法，于是得到$(a^2)^3=(a\times a)^3=(a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a)$，6个$a$相乘，所以$(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$．

那么，如果是$(a^m)^n$呢？那就是m个a的乘积再连续自乘n次，结果是$m\times n$个a连续相乘．因此可以得到幂的乘方的运算法则：$(a^m)^n=a^{mn}$．也就是说，幂的乘方，底数不变，指数相乘．

例如：$(4y^2)^3=$？解决问题的关键是要把系数4搞清楚，要知道$4y^2=4\times y\times y$，所以y的指数2，这个2是y自我相乘的次数，跟系数4没关系，但是整个算式的3次方，既是4的3次方，也是y^2的3次方，整个算式符合积的幂的运算法则，因此原式等于$4^3\times(y^2)^3$，后者符合幂的乘方法则，指数相乘得到$4^3\times y^{2\times3}$，进一步化简，得到$64y^6$．

了解了指数的运算法则以后，再重新看一下底数：我们知道$1\times1=1$，无论乘几次都等于1，所以1的任何次方都等于1．如果底数是负数呢？由于负负相乘的结果是正数，所以当底数是负数时，如果指数是个偶数，结果就会是一个正数；如果指数是个奇数，结果就会是一个负数．明白了这一点，我们就来一起分析下面的问题：

$$(-2)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}=?$$

我们知道指数的运算结果非常大，如果直接计算的话，－2自乘2020次结果就太大了，但是不要着急，我们可以分析一下整个算式，找一找化简方法．整个算式不是还要乘以$\frac{1}{2}$吗？幂的积等于积的幂，2和它相乘以后可以化为数字1．但是目前还不能这样简化，因为这两个算式的指数不同，一个是2020，另一个是2021．不要紧，为了使两式的指数相同，我们把$\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$看作$\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)$，这样就可以把$(-2)^{2020}$和$\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}$挪到一块儿，它们的指数都是2020，底数就可以相乘了，－2和$\frac{1}{2}$相乘的结果是－1，$(-1)^{2020}$是多少？这是负数的乘方，那我们就需要判断一下，指数是奇数还是偶数，2020当然是偶数了，所以这个

乘方结果就是1．因为后边还要乘以$\frac{1}{2}$呢，所以结果等于$\frac{1}{2}$，具体过程如下：$(-2)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}=(-2)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-2\times\frac{1}{2}\right)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^{2020}\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$．

通过乘方的运算，我们发现指数是这个世界最神奇的数字，别看它占的地方很小，可是只要稍微改变一下，就会发生天翻地覆的变化．我们在前文中说了，无论是科技发展，还是人类文明，这个指数都起着非常重要的作用．在日常生活中，我们经常见到的指数变化有两种：第一，就是财富的积累，我们把存款存到银行里，银行就可以付给我们利息，如果我们短时间内不把钱取出来，银行给我们的利息就会继续产生利息；这样一来，虽然一年的利息并不多，但是一旦积累几十年，我们的本金就可能会翻出数倍．第二，就是知识的积累，我们曾经反复强调过，一定要勤奋努力学习，这是因为我们今天的一分努力，将来换来的就不仅是一分回报，假设在365天当中，我们每天多付出1%的努力，一年下来，就会有37倍的收获，这就是指数的作用．

在前文中我曾经半开玩笑地提到，有人的地方就有江湖恩怨，有数的地方就有加减乘除．通过这两天的讨论，我们发现，虽然这个指数就占了小手指头那么点的地方，人家照样有加减乘除：指数的加法，对应着幂的乘法；指数的减法，对应着幂的除法；指数的乘法对应着幂的乘方；那么，这指数的除法是什么呢？

◎ 乘方的逆运算：六种运算的关系

指数有没有除法呢？指数的除法又会对应怎样的运算呢？要想弄明白这个问题，首先我们得研究一下乘方的逆运算．

众所周知，加法的逆运算是减法，乘法的逆运算是除法．那么乘方有逆运算吗？乘方表示的是几个底数相乘，那么连续相除是它的逆运算吗？所谓逆运算就是根据结果反推过程．那么乘方的过程是什么呢？比如a 的n 次方，它的过程就是n 个a 相乘，结果当然就是它们的乘积了．如果我们已经知道了乘方的结果和乘方的次数，能不能反推它的底数呢？比如10的3次方等于1000，这个过程属于乘方运算．但如果我问你，谁的三次方等于1000呢？这是不是就是根据乘方的结果，反推底数的过程呢？

是的，根据幂和指数反推底数的运算，就是乘方的逆运算，叫作开方，开方的结果又叫作方根．因为指数不同，所以在开方的时候，还需要指明它的指数．比如求一个数字是哪个未知数的平方，我们就把这个结果，叫作平方根，或者二次方根．如果是求一个数字是哪个未知数的三次方呢？我们就把这个结果，叫作三次方根，或者立方根．当然，还有四次方根、五次方根等，由于开方和乘方互为逆运算，因此根式的次数和乘方的指数是一一对应的．开方是初中阶段要学的最后一种运算法则，从此我们在加减乘除四则运算的基础上又增加了乘方开方的运算，六种运算的关系如图10 - 1所示：

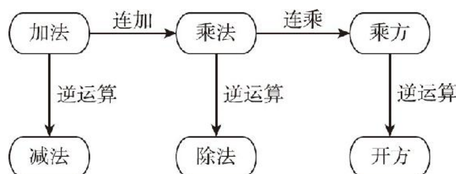


图10 - 1

那么，求一个数的几次方根用代数算式应该怎么表示呢？一般我们会通过用根号来表示开方的运算，这个根号底下的数字表示要开方的数字，根号左上角的数字，表示要开方的次数．因为乘方的指数是写在右上角的，所以开方运算时，指数就只能写在左上角了，比如$\sqrt[3]{27}$，它就

表示求27是哪个数的3次方，结果当然就是3了．不过，我们还有一个习惯，那就是：当指数是2的时候，可以忽略不写，比如$\sqrt{16}$ 表示的就是求16的二次方根．要注意的是，16的平方根是有两个的，$\sqrt{16}$ 所表示的只是正的那个平方根，它又被称作算术平方根．那么负的那个平方根怎么办呢？我们只能通过在前面增加正负号来表示，比如：16的平方根是多少？我们必须说，16的平方根等于$\pm\sqrt{16}=\pm 4$ ．相反，如果题目本身就是写的$\sqrt{16}$ ，我们可不能写±4，而只能写4．因为这个题目根本没问我们16的平方根是多少，问的只是16的算术平方根等于多少，所以只要写4，如果写成±4就算画蛇添足了．

明白了这个道理，我们分析一个例题：$\sqrt{a^2}=$ ？

这个题目让我们求的是a^2 的算术平方根是多少？那我们就要知道根号里面的部分是谁的平方，a^2 当然就是a 的平方了，所以这个结果就是a ，对不对呢？不对，因为算术平方根必须是正数或者0，而我们根本就不清楚a 是正数还是负数或是零．如果这个a 是小于0的呢？那不就得到负数了吗？所以必须要分情况讨论，要保证它的结果是非负数，开根号的结果就只能是a 的绝对值$|a|$ ，因此当$a\geq 0$的时候，结果是a ；当$a<0$呢，结果就是$-a$ ，即$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0);\\ -a & (a<0).\end{cases}$

接下来，我们再处理一个问题：$\sqrt{(3-x)^2}=$ ？

刚才我们讨论过了，一个东西平方再开根号，必须开出一个正的根来．如果是正数，开出来就是它自己；如果是负数呢，就是自己的相反数．也就是说，如果$3-x\geq 0$，开出来的结果就是$3-x$ ，如果$3-x<0$呢，开出来就是$-(3-x)$ ，也就是$x-3$．但是，这个情况我们不能这么区分，必须要对$3-x\geq 0$进一步化简，确定x 的取值范围，把$3-x\geq 0$这个不等式解出来，得到$x\leq 3$，就是说$x\leq 3$的时候，开方出来的结果是$3-x$ ．相反，如果$x>3$呢？开出来就是$x-3$，即$\sqrt{(3-x)^2}=|3-x|=\begin{cases}3-x\geqslant 0\text{ 时，}3-x;\\ 3-x<0\text{ 时，}x-3.\end{cases}$ 由$3-x\geqslant 0$ 得，$x\leq 3$，由$3-x<0$得，$x>3$，即$\begin{cases}x\leqslant 3\text{ 时，}\sqrt{(3-x)^2}=3-x;\\ x\geqslant 3\text{ 时，}\sqrt{(3-x)^2}=x-3.\end{cases}$

那么，开方运算和指数有什么关系呢？乘方要用指数表示，但是开

方用的是根号表示，看起来和指数好像没什么关系，但实际上开方运算还有一种指数表示法：那就是用一个数的n 分之一次方，表示开n 次方根，比如：$\sqrt{9}=3$ ，我们也可以表示为$9^{\frac{1}{2}}=3$ 同理$\sqrt[3]{8}=2$ ，也可以表示为$8^{\frac{1}{3}}=2$.

为什么会这么规定呢？这个规则可以由幂的乘方运算推演出来，我们知道（a^m）^{n} =a^{mn} ，我们假设m 、n 互为倒数，即$n=\frac{1}{m}$ ，原始就可以变为$(a^m)^{\frac{1}{m}}=a^{m\times\frac{1}{m}}=a^1=a$ ，我们再假设$a^m=b$ ，因此就有$b^{\frac{1}{m}}=a$ ，又因为$a=\sqrt[m]{b}$ ，所以就得到$b^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{b}.$

那么，如果是$b^{\frac{n}{m}}$ ，又该等于多少呢？我们知道$\frac{n}{m}=\frac{1}{m}\times n$ ，所以$b^{\frac{n}{m}}=b^{n\times\frac{1}{m}}=(b^n)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{b^n}$ ，由于乘法交换律，也可以认为$b^{\frac{n}{m}}=b^{\frac{1}{m}\times n}=(b^{\frac{1}{m}})^n=(\sqrt[m]{b})^n$.

接下来，我们分析这样一个问题：$8^{\frac{2}{3}}=$ ？根据上述规律，$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$ ，当然，也可以认为$8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4$.

通过上述讨论，我们终于凑齐了指数的加减乘除运算，以下表10－1是指数运算和乘方运算的对照表：

表10－1

指数运算	加法	减法	乘法	除法
乘方运算	乘法	除法	乘方	开方

到目前为止，我们就把乘方开方的基本运算都搞清楚了，但是好像有个重要的事情被我们遗忘了！我们都知道$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{9}=3$ ，那么$\sqrt{2}$ 的结果等于多少呢？这个问题可不能随便问，这又是一个杀人的数字，世界上第一提出这个问题的人，可被人扔到河里淹死了，这又是怎么回事儿呢？

十一　根式运算

◎ 杀人的数字：$\sqrt{2}$ 里隐藏的一桩血案

我们提到过，开方是乘方的逆运算，它既可以通过根号来表示，也可以通过指数是分数的形式来表达．不过，我们也发现了一个问题，那就是开方好像并不总能得到一个准确的数字，比如：4开平方可以得到2，那么2开平方得到多少呢？关于这个问题还隐藏了一桩血案，历史上第一个问这个问题的人，就被人给扔河里淹死了．而且这个杀人的人并不是别人，而是受害人的老师！那么这到底是怎么回事呢？让我们一起回到公元前6世纪的古希腊．

当时，古希腊先贤都在讨论世界本原的问题．哲学家恩培多克勒认为：我们生存的这个世界是由水、火、土、气四种物质组成的，这种观点得到了大多数人的支持．然而，有一个人却旗帜鲜明地指出“数字才是万物的本原”，他就是著名的数学家毕达哥拉斯．毕达哥拉斯不仅发现了大自然中隐藏的很多数学规律，而且还组织一帮自己的信徒，成立了毕达哥拉斯学派，他们希望通过研究数字的奥秘探知宇宙的真理．我们很难想象，在那个古朴的时代，毕达哥拉斯是怎样产生如此深远的见解的．正是这个见解影响了后来的柏拉图和欧几里得，西方的数学也因此取得了辉煌的成就．

毕达哥拉斯和他的门徒们通过多边形的点数来描绘自然数之间的关系，把一些数字叫作三角形数、正方形数、五边形数，而且还发现了这些数字之间的计算规律．他们还发现，在弹奏乐器时，弦所发出的声音的频率和琴弦的长度有关．同时，他们把天文现象归于数字，认为行星的运动会发出声音，而且行星运动所产生的天籁之音一定是和谐的．

他们对数字的痴迷、对数字的崇拜达到了无以复加的地步．他们认为，所有的数字都代表了某种特定的含义．比如：1代表理性，2代表女性，3代表男性，4代表正义，5代表婚姻，6代表神灵，7代表幸福，8代表和谐，9代表理想，10代表完美．他们为什么会产生这种想法呢？那是因为这些数字之间符合某种运算关系，比如2＋3＝5，所以女人加男

人等于婚姻；2 + 5 = 7，所以女性加婚姻就等于幸福，3 + 4 = 7，所以男性加上正义也等于幸福．他们还认为，世界上的所有数字都是由整数和分数组成的．正因为如此痴迷于数字的魅力，毕达哥拉斯学派也有着非常苛刻的教规．

不过，毕达哥拉斯为世人所知，主要是因为一个著名的发现：三角形的两个直角边长度的平方和，等于斜边长度的平方．这个在我国被称为勾股定理的数学规律，在西方一直被称为毕达哥拉斯定理．而我们开头提到的故事主人公，也恰恰是因这个著名的定理而死．他叫希帕索斯，是毕达哥拉斯的学生．

话说，一天毕达哥拉斯在浴室洗澡的时候，从浴室的地砖上发现了这个定理．他从浴室出来，就迫不及待地把这个定理告诉了希帕索斯．他指出，无论直角三角形的形状大小如何变化，每个直角三角形的两条直角边长度的平方和都等于斜边长度的平方，而且他还给出了一系列符合这个条件的整数，比如：$\begin{cases} 3^2+4^2=5^2, \\ 5^2+12^2=13^2. \end{cases}$

就在毕达哥拉斯兴高采烈地描述时，希帕索斯突然问了一句：“老师，如果直角三角形的两条直角边都是1，斜边长度应该是多少呢？”这个题目看起来很简单，斜边长度等于两个直角边长度的平方和，1的平方还是1，两个1的和是2，所以斜边长度的平方应该是2．毕达哥拉斯大概计算了一下，说：“这个数字大约是1.414吧，今天太晚了，算不出最后结果了，要不，你晚上接着算算吧．”希帕索斯就愉快地答应了．

当时他以为只要接着往下算，顶多再计算个十几位，就可以得出精确的结果了．可他一口气算了100位，仍然没有算完的迹象，这下希帕索斯慌了：这个结果该不会算不完吧？于是他按照反向思路试了试，这样一来，希帕索斯发现，这个数字果然是一个永远算不完的数字．那么，他是怎么算的呢？

首先，他假设这个数字是能算完的，也就是说，如果把2开平方以后能算完，那么它就一定是一个分数，这个分数可以约分，假设将它约分到最简分数以后的结果等于$\frac{n}{m}$．那么$\left(\frac{n}{m}\right)^2$自然就应该等于2．根据商的幂等于幂的商的原理：$\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}=\frac{n\times n}{m\times m}$．这个结果应该等于2，那么

矛盾就出现了：我们假设的是n 和m 不能约分，那么分子上的$n \times n$ 和分母上的$m \times m$ 也应该不能约分．所以一开始假设2的平方根是一个分数肯定就是错的．换句话说，2的平方根应该不是一个分数．这种推理方式叫作反证法或者归谬法，即我们先假设一个结论是对的，然后再通过严密的逻辑推理推导出一对矛盾的结果，以此来反证假设是错误的．如果不采取这种方法，直接计算2的平方根是算不完的，即使我们计算了1000位，也不能证明再计算10000位仍然算不完；同理，算了10000位也不能证明100000位算不完．对于这样一个看似无解的问题，我们只要转换一下思路，通过反证法就可以顺利地找到答案．

发现了这个结果以后希帕索斯大吃一惊，他马上告诉了自己的老师．毕达哥拉斯一看，希帕索斯的证明过程是无懈可击的．于是他就不得不对希帕索斯说，看来$\sqrt{2}$ 的确不是一个分数，不过这事儿暂时保密，等我再研究研究，彻底把这个问题弄清楚以后再对外公布．结果当天晚上，希帕索斯就被人捆起来扔河里了．

听到这里，我们就有个疑问了：2的平方根是不是分数有什么要紧？为什么一定要杀人呢？其实这个问题还真挺严重的，它被称为数学史上的第一次数学危机．因为在那个时候，我们已经知道了分数和小数间是可以相互转化的，无论是有限小数还是无限循环小数，都可以转化成分数，而且这个分数的分子和分母又是来源于整数的，所以大家自然认为世界上所有的数字都是来源于整数的．但是如果有一个数字，它既不是整数，又不是分数，这意味着什么呢？这意味着它是一个无限不循环的小数．要知道，在毕达哥拉斯学派里，每个数字可都被赋予了特殊的含义，那么，这种无限不循环小数的发现，无疑是动摇了他们整个学派的理论基础，会给他们的信仰带来严重的危机．这样的打击实在是太大了．

我们应该怎么样评价毕达哥拉斯和他所创立的学派呢？一分为二地来看待：一方面，我们必须承认，毕达哥拉斯独具慧眼地指出了“数是万物的本原”，这种观点是科学哲学的基础，具有非常深远的意义，引发了无数智者的思考；另一方面，我们也要明白，毕达哥拉斯学派对数字的过度崇拜，超出了理智的范围，是一种愚昧的表现．为什么一个人会集智慧和愚昧于一身呢？没办法，这就叫历史局限性．

远在公元前6世纪的那个年代，人们对这个世界的了解才刚刚开始，对于毕达哥拉斯而言，他的知识支撑不了他的理想，他的能力支撑不了他的雄心．跟毕达哥拉斯类似，亚里士多德仅仅试验了羽毛和石头就认定：重的物体比轻的物体下落速度更快，其实，他只要多比较几块石头就会发现，下落速度和重量是没有关系的．毕达哥拉斯其实也犯了同样的错误，他在没有认知整个世界的条件下，就开始了改变世界的步伐．

这一点对于我们而言，同样需要引以为鉴．很多人高喊着改变世界的口号，实际上不但不具备改变世界的能力，甚至连认识这个世界都还没有完成．所以，我们需要保持谦虚谨慎的态度，保持终身学习的习惯，要向书本学习，向他人学习，向大自然学习．

◎ 初中数学的所有数字类型

接下来，我们就把初中数学中所涉及的数字类型，认真细致地梳理一遍．

在小学阶段，我们接触的最基本的数字是1、2、3、4这些自然数，自然数都是从1开始，往后一个个增加，慢慢加出来的．有了加法就得有减法：两个小的自然数一加，可以得到一个大的自然数；反过来，大数减小数，得到一个小的自然数．但是，如果小数减大数呢？结果就超出了自然数的范围，得到一个负数，有了正负数就必须得有0了．我们把这个自然数、负数和0整到一起，统称整数．

而且我们还知道，乘法是高效的加法，两个整数相乘，相当于几个整数连着相加，整数相加的结果仍然是一个整数．所以依靠乘法是产生不了新的数字类型的．与乘法相反，当除法出现时，新的数字类型又产生了．两数相乘时，乘积的增长速度非常快，比如$3\times2=6$，$3\times3=9$，那6跟9中间的数字除以3怎么办呢？结果肯定没法整除，这样一来就产生了分数．通过上述分析我们不难发现，无论是减法还是除法，只要有逆运算，就会产生新的数字类型．减法产生了负数，除法产生了分数，我们把整数和分数合在一起，统称为有理数．那么整数和分数为什么叫作有理数呢？其实只不过是一种翻译错误，“有理数”这个词在希腊语中是“λογος ”，它的含义本来是可比数或可分的数，但是欧洲的数学教材先传到日本，日语把可比数翻译成了有理数，之后我们就将错就错地一直这么称呼．既然有了有理数，那就得有无理数．（如图11－1）无理数就是我们今天要讨论的无限不循环小数．

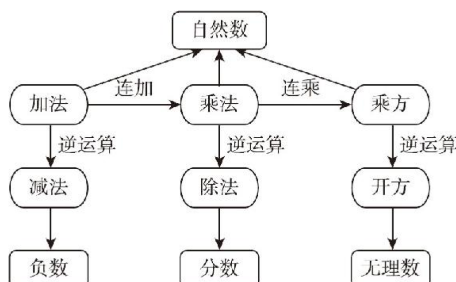


图11－1

哪个数的平方是2，哪个数字的平方是3呢？无论是整数还是分数中都没有这样的数字，结果就只能用$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$来表示．$\sqrt{2}$是无理数，$\sqrt{3}$也是无理数，那么是不是所有的无理数都是开方开不出来的数字呢？不是，只要是无限不循环小数，都被称作无理数！比如，我们熟知的圆周率π就是一个无限不循环小数，因此π也是一个无理数．

有理数和无理数统称实数．实数，按符号分，可以分为正数、负数和0；按算法分，可以分为整数、分数和无理数．这就是初中阶段全部的数字类型．我们学过的有限小数和无限循环小数呢？这些全部都可以化为分数．接下来我们就介绍一下分数和小数的转换方法．

首先，有限小数转换为分数是很容易理解的，比如0.3就是$\frac{3}{10}$；2.54就是$\frac{254}{100}$．不管小数位数有多长，我只要在1后边多加上几个0做分母就可以了．

那么循环小数呢？所有的循环小数都能变成分数．在循环小数变分数的时候，只要用循环的几个数字当作分子，在分母上补充对应的几个9就可以了．比如0.111…，如果1是循环的，咱就可以用1作分子，用1个9作分母，结果就是$\frac{1}{9}$．同样，如果是0.121212…，其中的12不断地循环，那么变成分数后，分子就是12，因为分子是两位数，所以分母就是两个9，也就是$\frac{12}{99}$．那如果是0.423423423…呢？当然就是$\frac{423}{999}$了．

那么，如果小数位不是全部循环的，只有部分循环，怎么办？比如，0.32454545…，后边的45是反复循环的，前边的32并不循环，这种情况下，只要把99的后边补上几位0，再用循环节45减去循环节之前的小数位就可以了，比方这个0.32454545…，前两位不循环、后两位循环，那么分子前两位是32，后两位是45－32＝13，即分子是3213，分母就是9900．几个循环数字就几个9，几个不循环数字就是几个0．

但是世界上有那么多分数，怎么可能分母都是带9的呢，那些不带9的怎么办？比如$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{7}$等，其实这些数字全部都能化成分母是几个9的分数，比如：$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$，$\frac{1}{7}=\frac{142\ 857}{999\ 999}$．

那么，为什么所有分数都能化成几个9几个0的这种形式呢？这个问

题有一点复杂，在这里就不给出完整的证明过程，只给出一个解释性的说明．任何一个分数都可以拆成两部分的乘积，比如：$\frac{n}{m}=n\times\frac{1}{m}$．关键在于，后面的$\frac{1}{m}$，一定是一个循环小数，当1除以某个整数的时候，随着除法不断深入，我们会在1的后边反复地补充数字0；随着除法的进行，商中的数字会一个个顺次浮现，被减数则会一点点往下减．那么什么时候商中的数字出现循环了呢？等余数只剩1的时候，因为剩下的余数1，再做除法的时候后边仍然还是要补充0，所以整个除法算式就开始进入了循环模式．刚才我们在1后边补充了很多0，所以得到的循环节乘以这个除数，结果一定是很多个9的组合．

那么，这里边就会有一个问题了，0.999…循环等于几，按照这个规律，在0.999…中，循环节是9，所以分子应该是9，它的循环位数是一位，因此分母也应该只有一个9，这样一来它就应该等于$\frac{9}{9}$，即等于1才对，但是，无论我们怎么看，都觉得它的结果是小于1的．那么它究竟等于多少呢？接下来让我们分析一下．

我们假设$0.999\ldots=x$，等式左右两边乘以10，得到$9.999\ldots=10x$，在这个等式两侧分别减去第一个等式，得到$9.999\ldots-0.999\ldots=10x-x$，合并化简得$9=9x$，两侧同时除以9，得到$1=x$，又因为$0.999\ldots=x$，所以$0.999\ldots=1$．

没错，0.999…确实就等于1．相关的证明方法还有很多，但是无论怎么证明，对于大多数人来说，还是过不了心里那道坎儿．如果你实在不理解，那我们就打个比方，我们知道1用百分数来表示，就是100%，而任何人都不是100%完美的，但是你只要朝着100%的方向不断努力，我们就可以认为你已经是100%完美了．

◎ 根式的运算法则：乘除、乘方及化简方法

一切的数字的本质都是算式．如果我们把这些数字都变成代数算式，它们又分别对应什么呢？整数对应的是整式，分数对应的是分式，因此无理数对应的就是无理式．因为无理式常常是要开根号的，所以又被叫作根式．我们现在就来谈一谈根式的运算法则．

什么叫作根式？根式就是一个根号里套着一个式子．像$\sqrt{a}$、$\sqrt[3]{b}$、$\sqrt[n]{c^{m}}$等都是根式．如果是a 的平方再开方，就不能直接等于a ，而是要根据a 的正负去判断结果的正负，这就是根式的基本运算法则．按照这个法则，完整的计算过程为：$\sqrt{a^{2}}=|a|$ ．当$a\geq 0$时，$\sqrt{a^{2}}=a$ ；当$a<0$时，$\sqrt{a^{2}}=-a$ ．

接下来我们再来看看根式的平方运算：如果我们把上述计算过程颠倒一下，把$\sqrt{a^{2}}$ 换成$(\sqrt{a})^{2}$ ，结果又应该等于多少呢？我们不妨先考虑一下：$\sqrt{a}$ 就相当于求a 是谁的平方，如果我们求出来结果等于b ，那么这个b 的平方就是a ．比如，9开平方是3，3再平方是9．那么$(\sqrt{a})^{2}=a$ ，是否还要分正、负两种情况讨论呢？这里就有一个“潜规则”了，这个规则就是题目中给出的算式默认都是有意义的，也就是说，既然题目给了我们$\sqrt{a}$ 这个表达式，那就说明这个算式一定是有意义的，也就是说根号里的a 不可能是负数．因此，$(\sqrt{a})^{2}$ 的结果就是a ，无须讨论a 的正负．

接下来，我们再研究一种运算规则，那就是多层根号的情况．例如$\sqrt{\sqrt{a}}$ ，这就等于a 开方以后再次开方，那么它的结果又是多少呢？我们知道$\sqrt{a}$ 可以用$a^{\frac{1}{2}}$ 表示，因此，$\sqrt{\sqrt{a}}$ 就可以表示为$(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ ，根据幂的乘方公式，我们需要保持底数不变，把两个指数相乘，于是得到$\sqrt{\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}$ ，a 的1／4次方用根号形式表示可以写为$\sqrt[4]{a}$ ．同理，如果我们用任意次的开方运算代替二次根式，就会发现：$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{n}\times\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$ ．

接下来，我们继续分析根式的乘除运算．例如：$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 等于多少呢？我们仍然把根号形式调整为指数形式：$a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}$ ，该式符合同指数幂相乘，底数相乘，指数不变，得到$(ab)^{\frac{1}{2}}$ ，再把指数形式调整为根号形式

表达，得出$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ．于是，我们知道，同次数的根式相乘，等于根式内的被开方数相乘以后再开方．那么，$\sqrt{a}$ 除以$\sqrt{b}$ 呢？很简单，幂的商等于商的幂，肯定也是等于根号里边的a 除以b 了．证明过程如下：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=a^{\frac{1}{2}}\div b^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$

回顾一下根式的乘除运算：两根式相乘，等于两式相乘以后再开方；两根式相除，等于两个式子相除以后再开方．明白了上述规则以后，我们就可以进行根式化简了．但是，我们要把根式化简到什么程度为止呢？化简到最简根式为止．最简根式有三个标准：第一，要把能开根号的字母或者数字全部都开根号出来；第二，要保证根号里头没有小数和分数；第三，如果结果是个分式，要保证分母的部分没有根式．这样的要求是不是有点苛刻？

我们从一个最简单的问题开始分析：$\sqrt{12}=$ ？我们一看12不能开平方，是不是不能化简了呢？不对，我们必须要把根号里的12拆成几个数的乘积，把它拆成2×2×3以后，找找这几个因数，有没有能当作平方数给拆出去的，我们一看2×2＝4，这4是可以开平方的，所以$\sqrt{12}=\sqrt{2\times2\times3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ．

接下来我们再看个分数的问题：$\sqrt{\frac{2}{3}}=$ ？这个算式的根号里头有分母，我们怎么把它去掉呢？好办，它不是分数吗，我们把分子分母同时乘以一个数，把分母变成一个平方数．3乘以什么能变成平方数呢？可以乘以3，分子、分母都乘以3，这样就可以进一步简化了，按此思路得到$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ．现在这个根号里头没有分母了，分母里头也没有根号了，符合最简根式的要求，因此它就是最后的解．

最后我们再来处理一个问题：化简$\sqrt{-\frac{b^2}{a}}$ ，其中$b<0$．在此题中，根号里有个负号，我们曾经反复提到根号里不能是负数，那这个根号里头为什么有个负号呢？我们分析一下：b 虽然是负数，但是b 经过平方以后，那肯定就是正数了；要想让这个根式有意义，只有a 是负数时，根号里面的内容才可能大于等于0，这个根式才可能成立．因此，我们就得到了a 的取值范围是$a<0$．接下来，我们先把分子分母的部分独立拆分出来，得到$\sqrt{-\frac{b^2}{a}}=\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{-a}},$ 再把分子开根号出来，得到$|b|$ ，

$\sqrt{-\frac{b^2}{a}}=\frac{|b|}{\sqrt{-a}}$，因为$b<0$，所以原式$=\frac{-b}{\sqrt{-a}}$. 为了消去分母上的根号，需要在分子分母上同时乘以$\sqrt{-a}$. 得到$\sqrt{-\frac{b^2}{a}}=\frac{-b\sqrt{-a}}{\sqrt{(-a)^2}}=\frac{-b\sqrt{-a}}{-a}$，消去分子分母的负号，得到$\sqrt{-\frac{b^2}{a}}=\frac{b\sqrt{-a}}{a}$.

◎ 乘方开方混合运算：规律和禁忌

到目前为止，初中阶段所涉及的六种运算方式（加、减、乘、除、乘方、开方）全学完了．为了夯实基础，我们来回顾一下这些运算法则，看看其中存在哪些普遍的规律，又有哪些不能触碰的禁忌．

首先，一切算法全部都是从最简单的加法派生而来的，乘法的本质是多个相等的数相加，乘方是多个相同的数相乘．无论是加法、乘法，还是乘方，都属于正向的计算，因此其结果都只能是自然数，不会带来新的数字类型．

其次，加法、乘法、乘方产生以后，就分别产生了自己的逆运算，那就是减法、除法和开方．与此同时，每一种逆向运算法则，都产生了原来从未遇到的数字类型：减法产生了负数，除法产生了分数（或者说小数和循环小数），开方产生了无理数（或者说无限不循环小数）．我们也曾提到，在人类历史上，无论是负数、0，还是无理数，每一种数系的产生都经历了非常痛苦的历程．

最后，这些算法之间的相似性：乘法的交换律、结合律和加法交换律、结合律形式上完全一致；同底数幂相乘的规律，跟乘法的分配律极其相似；任何一种逆运算都可以表达成正向运算的方式，比如，减法可以被认为是加上一个负数，除法可以被认为是乘以一个倒数，开方可以被认为是一种指数是分数的计算．一旦理解了这一点，所有适用于加法的运算规则，同样适用于减法；适用于乘法的运算规则，同样适用于除法；而适用于乘方的运算规则，同样适用于开方．

尤其精妙的是，指数的运算规则是可以简化降级的：在指数这样小小的位置上，也有着正数、负数、整数和分数，整个有理数的集合一个不少，所有加减乘除的四则运算一个不缺．其中，指数的加法对应着幂的乘法，减法对应着幂的除法，乘法对应着幂的乘方，除法对应着幂的开方，从乘、除、乘方、开方变成了加、减、乘、除，整个计算的难度降低了一个级别．（见表11 - 1）

表11 - 1

指数运算	加法	减法	乘法	除法
乘方运算	乘法	除法	乘方	开方

这样高度的相似性，这样巧妙的设计，不由让我们发出感叹，整座数学大厦是多么的精巧；这样精巧的结构，也很容易让我们产生错觉，我们会误以为所有的运算顺序都是可以打乱的，误以为任何两个数字都是可以加减乘除的．因此，我们还需要特别注意这些算法的禁忌．

首先是计算顺序的问题．在任何一个算式中，括号里的内容总是优先计算的，而且如果算式中有多个括号，优先计算的是最里边的内容；排在括号之后的，是乘方和开方的运算，这两者的优先级相同；然后是乘除法运算；最后是加减法．这样的运算顺序优先级是绝对不可以随意打乱的，只有在同一优先级别的运算之间可以相互调整顺序．

计算优先级：括弧 > 乘方和开方 > 乘除 > 加减

其次是不能把适用于一类算法的规则错误地移植到其他运算中去．比如，我们看到同底数幂相乘的规则很简单，就误以为，同底数幂相加的时候，也是可以底数不变、指数相加的；我们看到分数相乘的时候分子乘分子、分母乘分母，就误以为分数相加的时候，也是分子加分子、分母加分母的，这样虽然形式上看上去很美，但其结果却是错误的．所以我们要知道，数学的美，一定要建立在真实的基础上，一定要深刻理解算法的本质，不能随心所欲地捏造一个规则出来．

最后是尽管运算规则有六种，但绝不是每一种数字都能参与到计算中去的．比如，0不能做分母；0做底数时，指数只能是正数；负数不能开平方；开平方的结果是非负数．这些规则的存在，使我们在解题时要作出双向的判断：首先要根据题意，判断题目本身有意义的情况下，那些字母变量的取值范围；然后要在求解完成以后，根据可能的取值范围，再次进行判断，在判断时，正数、负数、0、整数、分数都是日常要考虑的．尤其是0的存在．

为了便于理解和记忆，我曾经打了一个比方：加减法是数字的老祖母0负责管理的，所以加减法可以任意交换；乘除法和乘方开方是数字的老祖父1负责管理的，所以乘除法和乘方开方就能任意调整．而且我

们还知道，所有的数字就其本质而言都是一个算式，在学习无理数的时候，我们再次感受到了这样的规律．很明显，$\sqrt{2}$ 不是一个数字，它分明只是说明了这是2在开平方．既然每个数字都是一个算式，与所有数字类型对应的也就有多个算式类型．与整数对应的有整式，与分数对应的有分式，与无理数对应的有根式；并且，因为每一种数字都有自己的加减乘除法则，所以，每种算式也有自己的加减乘除法则．

计算数字的目的，是为了得到最后的得数；计算代数表达式的目的，是为了得到最简单的算式．什么是最简算式？最简算式，就是计算步骤尽量少、数字尽量少、计算规则尽量简单的算式．比如，在$ab+ac$ 这个算式中，有两次乘法运算和一次加法运算，先后一共有三次运算，如果我们按照乘法分配律，把它变成$a(b+c)$，那么三次计算就变成了一次加法和一次乘法共两次计算，这样我们就可以认为算式得到了化简．同样，因为根式和分式的计算比较复杂，所以我们会要求根式化简的时候，根号里头没有分母，分母里没有根式．

整个初中代数就是算式子，内容包括加式加加式、加式减加式、加式加减式、加式减减式等．按照这个架构，最后剩下的，就是加减式之间的相互乘除．

十二　多项式运算

◎ 改变世界的二次方程：算出最优解

接下来，我们就要进行初中代数最核心的内容的学习了．将要学习的二次方程，就是教我们怎么改变世界的．二次方程为什么就能改变世界呢？

什么叫改变世界，怎么改变世界？我们平时在工作生活之中的每一次选择，都是在改变世界．比如，你出售的商品怎么定价？你今天晚上学习到几点？你明天想去哪儿玩？你开车的时候时速是多少？你的所有选择，都在改变世界．因为我们的选择既可以让自己周围的世界变好一点点，也可能让它变糟糕一点点，这种改变如果只有一两次，看起来好像很微弱，但是一旦它像指数一样累积起来，就会发生翻天覆地的变化．那么，我们的选择跟二次方程又有什么关系呢？接下来，我们就看看二次方程在工作、学习和生活中的应用．

先以工作问题为例．假设你是一个商店的老板，对于正在出售的每一件商品，你都有权力调整它的价格，但同时你必须知道，无论这个商品卖得太贵还是太便宜，都赚不到钱．如果定的价格太高了，客户就都不来买你的货了；定价太低了，虽然买货的人多，但是每件商品的利润太低了，最终仍然是赚不到多少钱．那么价格怎么定才最合理呢？有人说，价格差不多就行了．这个说法倒是没错，不但定价是差不多就行了，天下所有的事都是差不多就成了．但是就一件具体的商品而言，到底是3.6元差不多，还是4.2元差不多呢？真要解决具体问题的时候，一是一，二是二，必须对问题进行定量分析，不能光讲大道理．那这个问题怎么求解呢？

首先，我们得做个调查，知道周围最多能有多少客户买东西；其次，要知道这个东西最高能卖到多少，也就是说价格定到多高以后刚好就没人来买了．只要有这两个数字，就能开工干活了．假如这件商品的进货价是12元钱，周围有1000个客户能买这件东西，经过调研发现，当卖到22元钱的时候，就一个客户都不来买了．于是我们就知道了定价范

围在12元和22元之间．这其中大概有10元的利润空间．换句话说，当我们把这件东西卖12元钱的时候，1000个客户都来买我们的东西．而如果我们抬高了售价，每卖贵1元，来的客户就会减少一些，直到卖到22元钱的时候，就一个客户都不来了．因为一共有1000个客户，一共有10元钱的利润空间，所以我们可以简单地认为，每卖贵1元，就少来100个客户．比如：我们要卖13元，客户就会少来100个，于是就只有900个客户来买；同理，如果卖14元呢，就是800个客户来买；依此类推，卖到21元的时候就只剩下100个客户了；卖到22元，就没人来了．有了这样的假设，我们就可以算算怎么样更赚钱了．

假设每一件商品能够赚的利润是x，此时来的客户数量是多少呢？客户最大数是1000个，每贵1元钱少来100个，贵了x元就少来$100x$个，因此，客户数量就是$1000-100x$．那我们把利润x和客户数量$1000-100x$两者相乘一下，得到$x(1000-100x)$，按照乘法分配律，就得到了$1000x-100x^2$．因为算式中出现了x^2，因此它就属于一个二次方程的问题．那么这个方程怎么解，对不起，暂时保密．接下来我们还要继续分析学习的问题．

我问你：今天晚上你打算几点睡觉呢？一般情况下，我们在分析睡觉问题的时候，都把它当作一个生活习惯问题，我们只知道充足的睡眠可以保障健康，但它跟二次方程有什么关系呢？接下来我们就一起来分析：假设人每天需要8个小时睡眠，如果你把用来睡觉的x小时挤出来学习，那么，每天你就多学x点的知识；但是因为你睡觉少了，第二天你在课堂上就会犯困，导致学习质量下降，因此你又少学了一点东西．问题在于，你用x小时学来的东西多，还是因为犯困少学的东西多？这就得继续往下分析！假设你每天正常的学习时间是10个小时，如若你在精神充足的条件下，挤占x个小时后，第二天学习的时间就是$10+x$，但问题在于你占用睡觉时间，不可能精力充沛了．现在，你的睡眠时间只剩下$8-x$个小时了，我们用$8-x$除以正常睡觉的时间8小时，得到的比例就是你的睡眠质量．进一步假设第二天的学习效率和睡眠质量相等，那么，第二天的学习效果就是学习总时间乘以学习效率也就是$\frac{(10+x)(8-x)}{8}$，化简以后得到$10-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x$，是不是也是一个二次式呢？你以为只有这个问题需要二次方程吗？实际上如果我们按照这种

思维方式往下分析，连你的台灯多高也得用二次方程求解．

那你说，我不学习了，开车出去玩一会儿总可以吧．那我问你，这车开多快最省油？如果你开得太快了，车遇到的风阻就会特别大，部分能量就白费了；可是如果你开得慢了，你烧的油大部分就都变成热量散失了．什么样的速度最省油呢？这仍然是一个二次方程的问题．除此之外，长度一样的两条路面，一条是平的，另一条要下坡以后再上坡，哪一条路跑起来更快呢？你可能会说这不是一个简单的几何问题吗？肯定是直线的路面最短最快，你要是这么认为，就大错特错了，一旦你用了代数方程求解就又会发现，看起来有点弯曲的路面反而是快的！

你发现了没有，无论是在工作、学习中，还是在生活中，二次方程真是无所不在．记得我们讲二元一次方程组的时候，也举过工作和生活中的例子．但我要告诉你的是，在绝大多数情况下，我们遇到的问题实际上都是二次问题，而不是二元问题．它们的区别在于，二元问题，需要我们对两件不同的事做出选择；而二次问题要求我们对同一件事的不同方式不同程度做出选择．在面对这类问题的时候，要记住孔子的话：“过犹不及！”其实，东西卖得太贵或太便宜了都不行，学习和休息要结合起来．但是你要知道，这只是一个定性的描述，而不是一个定量的表达，究竟定在多少才是最合适的，这才是问题的关键．

◎ 多项式乘法：一个公式的多种变形

在前文中，我们通过几个例子，演示了二次方程的重要性．要想对二次方程求解，那还得先学点新东西．一次方程求解相对容易，但是二次方程就不那么简单了．可以毫不夸张地说：整个初中二年级的所有代数课程，全部都是给二次方程做准备的，包括我们刚刚学过的乘方、开方、分式计算，还包括我们接下来要学的多项式乘法和因式分解．

在讲代数架构的时候我就讲过，初中代数学的就是算式子，而且我们还把这个算式子，通过加减乘除分了四行三列的一个方阵，然后再用连线把加减乘除连起来，就得到了我们初中代数算式的所有内容，这里边有加式加加式，加式减加式，减式加减式，乘式乘乘式，乘式除乘式，等等，一共有64种组合．截至目前，我们已经学了一大半了，接下来我们要学习的多项式的乘法，就属于加减式之间相乘的法则．同时我们还要学如何把一个多项式，分解成几个算式的乘积，这个过程叫作因式分解．

提到两个多项式的乘法，倒是一点都不难，我们只要按照乘法分配律，把多项式里边的每一项逐个展开就可以了．这么说有点抽象，我们就举个例子．比如$a\times(b+c)$，在这个算式中，乘号前面的a就属于一个单项式，但后面的$b+c$就是一个多项式了，根据乘法分配律可以知道：$a\times(b+c)=ab+ac$．

如果是$(a+b)(c+d)$呢？道理也是一样的，我们把$a+b$看成一个整体，让这个算式分别跟后边的c和d相乘，然后加起来就对了，也就是$(a+b)c+(a+b)d$，然后，我们再把c和d分别乘到括号里边，就得到了最终结果：$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$．这个公式就是多项式乘法的运算法则．即使是再复杂的多项式乘法运算，也只不过是这个公式的变形而已．其实这种算法，我们在小学阶段也曾经接触过．比如两位数的乘法吧，我们是怎么做的呢？以12×34为例，我们在展开计算的时候，是不是先用2乘以4得出来8，然后再用12前面的1乘以4，得到一个4，因为1表示的是10，所以4表示的就是40，我们把这个4写在8的前头，表示40＋8＝48；然后接着处理第

二行，先用2乘以3得6，因为3表示的是30，所以6表示的是60，再用1乘以3，得到3，它表示的是300，把3写在6的前头表示360，最后把这两行加起来，48＋360得到408．

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times\ \ 3\ 4 \\ \hline 4\ 8 \\ 3\ 6\ 0 \\ \hline 4\ 0\ 8 \end{array}$$

回顾一下整个过程，我们是不是把这个12×34的过程，拆成了（10＋2）×（30＋4）呢？在具体计算的过程中，是不是又把这4个数字展开交错相乘再相加呢？没错，我们的计算过程就是：2×4＋10×4＋30×2＋30×10＝408．

如果再详细分析一下三位数、四位数的乘法，也就不难得出形如（$a+b+c$）（$d+e+f$）的计算结果了．很简单，都是把前边的每一项，分别和后边的每一项相乘，最后再把所有的结果都加起来，这就是多项式的乘法．关于多项式的乘法，还可以通过图形法来证明一下．比如（$a+b$）（$c+d$），我们可以在草稿纸上随便画一个长方形，然后把长随意分成a、b两段，再把宽随意分成c、d两段，再利用这个分割点画个十字，这样一来就把整个长方形分成了四个部分．长方形的总面积就有两种算法：一种是长乘宽，就是（$a+b$）（$c+d$），另一种呢，就是四块小长方形的面积之和．我们一看这四个小长方形的长宽就知道了，它们的面积分别是ac、ad、bc、bd，把它们一乘一加，结果得到的还是多项式的乘法公式．（如图12－1）

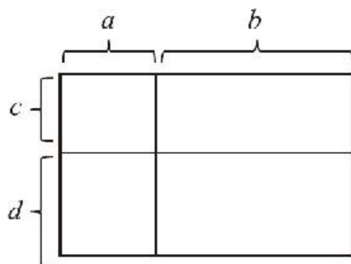


图12－1

提到这个图形证明方法，我又想到了国外的一种计算方法．大部分外国人都不会九九乘法表，他们怎么算乘法呢？据说印度人采用的是这种办法：他们算乘法的时候，会在地上画道道，比如12×23，先在地上

水平画一条线，然后再隔一段往地下画两条水平线，这样就表示12；然后要乘以23了，先从左边竖直地画两根竖线，而后隔开一段在右边再画上3根线，最后数一数这个线的交点，加一起，然后就知道乘积是多少了．（如图12－2）这是为什么呢？



图12－2

其实，他们也是通过多项式乘法来解决问题的．如果把第一个两位数看成$a+b$，第二个两位数看成$c+d$，这个两位数的乘积不也是多项式的展开公式吗？当在这个纸上横竖画上a条直线和b条直线相交，就会产生$a\times b$个交点，这样一来，把交点数一数、加一加，当然就知道结果了．

综上所述，多项式的乘法公式就是这么简单．不过仍有两点需要说明：第一，实际运算之前，应该先看一眼这个多项式乘法乘出来以后是多少项；然后核对一下总的项数，避免漏写一项．如何一眼看出来展开后有几项呢？我们只需要用前面的项数乘以后边的项数就知道了．第二，如果多项式内有减法，一定要把它看成是加上负数，同时负数之间相乘的时候，记得要变正号．这两点都是最容易犯的错误，我们得提前注意，避免出错．

两个多项式相乘，只要把前后两个多项式逐个展开相乘，然后再相加就可以了，如果用代数公式表达就是$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$．为了加深印象，我们还给出了特例证明、代数证明和图形证明三种方式．那么，在多项式的乘法中，还有哪些秘密呢？

◎ 完全平方公式：代数、图形和类比

接下来，我们要继续讨论多项式乘法的一种特殊形式，$(a+b)\cdot(a+b)$，也就是$a+b$的平方会有什么样的结果呢？

$$(a+b)^2$$

$$=(a+b)(a+b)$$

$$=(a+b)a+(a+b)b$$

$$=a^2+ba+ab+b^2$$

$$=a^2+2ab+b^2$$

结果为什么会是这样呢？根据幂的乘方公式，我们知道积的幂等于幂的积，也就是$(ab)^2=a^2b^2$，两数相乘的平方等于两个数分别平方再相乘；但如果变成两数相加的平方，为什么$(a+b)^2$就不等于a^2+b^2呢？为什么一定要多出个$2ab$呢？带着这个问题，我们继续往下看.

如果是$(a-b)^2$又应该等于什么呢？是等于a^2-b^2+2ab呢，还是等于a^2-b^2-2ab呢？不要着急，还是按照多项式展开的规则，逐步处理：

$$(a-b)^2$$

$$=(a-b)(a-b)$$

$$=(a-b)a-(a-b)b$$

$$=a^2-ba-ab+(-b)^2$$

$$=a^2-2ab+b^2$$

结果出来了，b^2一项居然是正的，负号都跑$2ab$那儿去了．为什么会这样？我们可以参考第一个公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

如果把其中的b 换成了$-b$ ，那么这里面b 的平方，也就变成了$-b$ 的平方，而$-b$ 的平方肯定还是等于b 的平方，但是$2ab$ 就不行了，把b 换成$-b$ 以后，$2ab$ 当然就只能变成$-2ab$ 了．这就是今天我们要学的两个公式，它们被称作完全平方公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

在学习之前，我们是不是感觉对那个$(a+b)(c+d)$很熟了，可是这两个新公式一推导出来，还是感觉有点诧异，为什么会凭空冒出来个$2ab$ 呢？跟$(ab)^2=a^2b^2$ 这个公式一比，完全平方公式简直是丑爆了．这样的结果完全不符合我们的直觉，因此才会有人在面对这些公式的时候头疼不已．但是我们必须要清楚，学习的目的本来就是对抗自己的直觉，提升自己的理性．因此还得想办法把它记住．接下来，我们还是通过图形和类比的方法加深一下自己的印象：

如图12-3，我们先在纸上画出一个正方形，假设它的边长是$a+b$ ，然后拿个边长是a 的刷子，靠左边从上到下刷上红色，那么这个正方形就变成两部分了，左边是宽度为a 的红色长方形，右边是宽度为b 的长方形；然后，我们再用一把边长是a 的黄色刷子，靠在上面从左到右地刷一遍黄色，这样一来，水平方向也分成了两部分，结果这个正方形就被分成了四个部分．然后这个大正方形的面积就有两种表达方法了：第一种方法是把它看作是总体的，它的边长是$a+b$ ，面积就是$(a+b)$的平方；第二种方法是把四部分的面积加起来，橙色的正方形面积是a 的平方，白色的是b 的平方，还有两个长方形的面积是$2ab$ ．最后我们就得到了这样一个结果：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ．

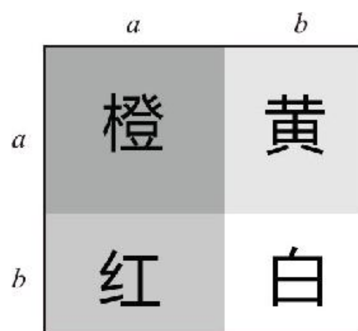


图12-3

差的平方公式呢？只要我们改改字母就行了，得重新定义一下这个正方形的长度，把整体的大正方形边长看成a，把左上角那个橙色的正方形边长看成b，那么右下角的那个正方形的边长就是$a-b$了．（如图12－4）这个小正方形的面积也有两种表达方式：第一种就是（$a-b$）的平方；第二种就是大正方形，减去剩下的三个部分．那你说这不是等于a^2减去b^2，再减去$2ab$吗？它怎么是加b^2呢？你忘了，那黄色和红色的长方形的长、宽，它不再是a、b了，它的长还是b，但宽度变成了$a-b$，这两个长方形的面积和，是2（$a-b$）b，当a^2减去它的时候，那$-2b^2$变成正的了，跟外头的一个$-b^2$相互抵消，就剩下了一个正的b^2了．

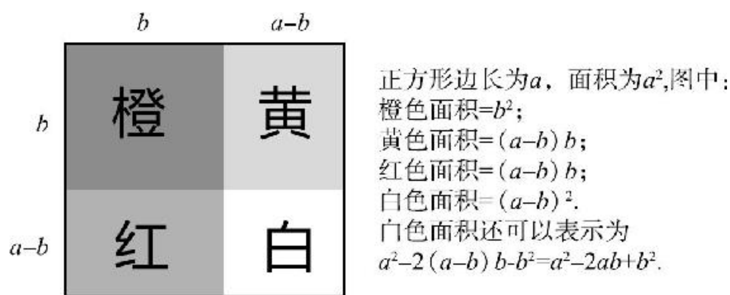


图12－4

上述证明过程显然不如平方和公式容易理解，接下来我们再做一个类比．我们把这个平方的操作比作干活，把这个加法操作看成两个人的合作．无论是在工厂里干活还是在野外打猎，两个人一起干活的力量，会远远大于两个人分别干活的和．因为在分工协作之中，a、b两个人就能相互帮助，他帮助你，你帮助他，所以就会多产生出$2ab$的工作量来．那么这负的$2ab$又应该如何理解呢？那就是说，如果你摊上一个成事不足败事有余的“猪队友”，结果就是，他把自己的活干好了，但是给你添的乱那是无穷无尽的，他踢你一脚，你打他一拳，可不就是$-2ab$了吗？

以上，我们通过代数证明、图形证明、类比证明三种方式，完成了完全平方公式的证明．接下来，我们通过一个例题再来个特例证明：请问21×21等于多少呢？这不是个小学算术题吗，跟完全平方公式有什么关系呢？我们曾经说过一切都是算式，这21不也是由20＋1组成的吗？21×21，是不是20＋1的平方呢？按照公式等于第一个数的平方加上两

个数的积的两倍，再加上最后一个数的平方，其实就是等于20的平方加上20×1的两倍，再加上1的平方，等于多少呢？441．那如果是19的平方又应该等于多少？等于10加9的平方吗？那多累，为什么不用20－1的平方计算呢？通过400－40＋1不难得出，结果等于361．

◎ 平方差公式：平方差和差的平方

两个数差的平方，不等于两个数的平方的差；那么两个数的平方差等于什么呢？接下来，我们一起研究一下平方差公式．

如图12 - 5所示，如果在一个边长是a 的正方形的右上角，切去一个边长是b 的小正方形，就会剩下一个大L形，它的面积就等于大正方形的面积减去小正方形的面积．同时，L形的面积还有另一种算法，我们可以把L形的上半部分裁剪下来，移动到右侧．由于这个L形的高度等于a ，上半部分的高度为小正方形的边长b ，它的宽度等于大正方形的边长a 减去小正方形的边长b ．把上半部分裁剪下来移动到右侧以后，就会发现，我们拼成了一个新的长方形，这个长方形的高度是$a-b$ ，长度是$a+b$ ，因此它的面积就是（$a+b$）（$a-b$）．这就是平方差公式：两个数的和跟差的乘积，就等于两个数的平方差．用代数式可以表示为：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ．

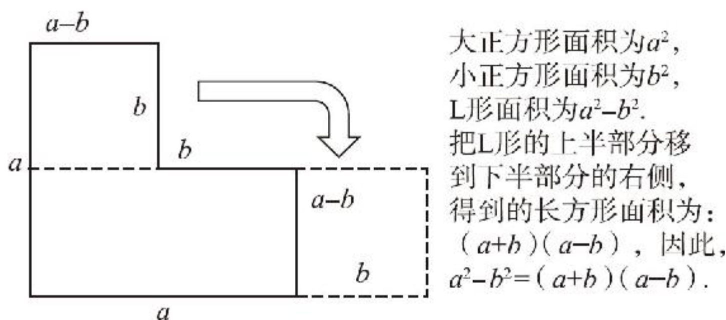


图12 - 5

这个结果对不对呢？我们再通过多项式的乘法公式验证一下：把因式依次展开，得到：

$$(a+b)(a-b)$$

$$=(a+b)a-(a+b)b$$

$$=a^2+ba-ab-b^2$$

$$=a^2-b^2$$

看起来还真是对的．接下来，还可以通过一个特例来验证一下：101×99等于多少？如果我们把101看作$100+1$，把99看作$100-1$，两项相乘就可以套用平方差公式了，具体过程如下：

$$
\begin{aligned}
& 101\times99 \\
&=(100+1)(100-1) \\
&=100^2-1^2 \\
&=10000-1 \\
&=9999
\end{aligned}
$$

经过反复验证，我们发现平方差公式确实是正确的．接下来，我们来探讨一个有意思的话题，两个数的平方差和差的平方，两者谁大谁小呢？比如10和8，它们的平方差大呢，还是差的平方大呢？那我们就试一试，10和8的平方分别是100和64，两者之差是36；但是它们的差是2，2的平方是4，看起来，平方差比这个差的平方大不少．是不是所有的数字都是这样呢？我们就用这两个代数公式验证一下：我们用这个平方差，减去差的平方，得到：

$$
\begin{aligned}
& (a^2-b^2)-(a-b)^2 \\
&=a^2-b^2-(a^2-2ab+b^2) \\
&=2ab-2b^2 \\
&=2b^2\left(\frac{a}{b}-1\right)
\end{aligned}
$$

通过这个结果可以发现：当b不等于0的情况下，如果a除以b大于1，那么平方差更大；相反，如果a除以b小于1，那么就是差的平方更大．我们分别研究了完全平方公式和平方差公式，接下来我们通过两道例题巩固一下已有的知识．

$(a^2b+b)(a^2-1)=$？第一眼看过去，这个算式跟前面学的公式没什么关系，别急，让我们仔细看看，前边的(a^2b+b)，前后

两项都含有b，如果通过乘法分配律提取出一个公因式b，就可以变成$b(a^2+1)$，此时我们再看一下原来的题目，原式还有一个(a^2-1)，两式相乘，可以凑成平方差公式，按此思路，得到：

$$(a^2b+b)(a^2-1)$$

$$=b(a^2+1)(a^2-1)$$

$$=b[(a^2)^2-1^2]$$

$$=b(a^4-1)$$

$$=a^4b-b$$

接下来再看一个题目，$(3-x)(x-3)$等于多少？我们大概一看，这个算式好像是平方差公式，因为前后两个算式是相反的．可是仔细一想，发现题目中并没有两数相加的部分．那么它到底符合哪个公式呢？我们不妨对比一下$x-3$和$3-x$，这两个算式是什么关系呢，它们彼此互为相反数，因此，我们只需要提取一个-1作为公因式，就可以把两个算式变成一样的，比如我们把$3-x$也变成$-(x-3)$，那么就得到负的$(x-3)$的平方，按此思路解得：

$$(3-x)(x-3)$$

$$=-(x-3)^2$$

$$=-(x^2-2\times3\times x+3^2)$$

$$=-(x^2-6x+9)$$

$$=-x^2+6x-9$$

我们学了多项式的乘法公式、完全平方公式和平方差公式．我们发现所有的多项式乘法公式，都是从乘法分配律中派生出来的，只要把相乘的各项逐个相乘再相加，就可以得到最终的结果．不过，当完全平方公式展开以后，它丝毫没有把算式简化的意思，比如：$a+b$的平方，只要经过一次加法、一次乘法就可以得到结果，可是如果我们把它展开

以后呢，就得到了$a^2+2ab+b^2$，这个算式里边有多少次计算呢？如果你数一下就会发现，结果竟然变成了6次计算，比原来的$a+b$的平方复杂了三倍，为什么我们要费这么大劲把它们展开呢？

十三　因式分解

◎ 因式分解：多项式展开

为什么代数式化简要越来越简单，而多项式展开过程反而越来越复杂了呢？这里面有三个原因：

第一，当我们遇到一个具体问题的时候，表面上复杂的算式，有可能反而是简单的．比如53×47，这个算式就是两数相乘看似很简单，可是如果让我们口算，很难一下子找到答案．但如果我们把它化成（50＋3）×（50－3），马上就可以看出来，它符合平方差公式，结果等于50的平方减去3的平方，虽然50的平方减去3的平方需要三次运算，但是我们却能很快口算出来：50的平方是2500，3的平方是9，两者相减得到2491．但是我们还得回过头来想一想，为什么展开后的三次运算，反而比一次运算更简单呢？是因为数变小了吗？不对！其实是因为我们没弄明白，原来的53×47，在实际运算的时候，是要按照（50＋3）×（40＋7）来展开计算的，这个算式一展开，那就是四个乘法加三个加法，一共是七个步骤，正因为我们借助了平方差公式，才把七个步骤简化为了三个．这就是我们要说的第一点，如果只看公式，表面上确实费事了，但遇到实际问题的时候，还得具体问题具体分析．

第二，既然把公式展开会变得复杂，那就证明我们也可以把一个复杂的多项式转换为简单的平方式．我们学这个多项式的目的之一是解二次方程，比如有这么一个方程：$4x^2+9=12x$，面对这样的方程式，很难发现x的值等于多少，但是，如果我们把$12x$挪到方程的左边来就会发现，该方程完全符合完全平方公式：$4x^2=(2x)^2$，$9=3^2$，$-12x=-2\times2x\times3$．这三项正好凑齐了一个完全平方公式，因此，原式可以转化为$(2x-3)^2=0$，一个算式的平方等于0，只能证明这个算式本身等于0，即$2x-3=0$，因此解得$x=\frac{3}{2}$．但如果我们不懂得完全平方公式，就无法解出这个方程．

第三，我们现在学的是多项式的乘法，将来还要学多项式的除法．如果把两个数相除，要想化简分数，就必须把被除数分解为几个数的乘

积．数字是这样，多项式也是这样，当我们处理多项式除法的时候，面对的就是一组多项式除以另一组多项式了．这也就意味着，我们必须把多项式转换成几个算式的乘积，但面对复杂的多项式，我们怎么能够完成这一步转换呢？很多情况下，就只能凭借我们之前学的几组公式来处理．说到这里，我们就算进入了本章的主题．

在数学中，相乘的两个变量叫作因子，相乘的两个算式就叫作因式，所以我们就把一个多项式拆成几个因式的乘积的过程叫作因式分解．我们刚才提到的二元一次方程问题和分式化简的问题，都要依靠因式分解来解决．听到这儿你可能会说了，我们好不容易学会把几个因式给展开了，现在又让我把展开以后的多项式给变回去，这变来变去的，不是瞎折腾吗？你还真说到点子上了，的确有好多同学在学到因式分解以后，就找不到方向了，一会儿把这个式子乘进去，一会儿又把它分解出来，折腾几圈下来，就把自己绕晕了．其实，我们学多项式展开的最主要的一个目的，就是学因式分解．那你说，我们为什么要把一个多项式变成几个相乘的因式呢？有两方面的原因：

第一，可以简化计算．这个道理刚才咱们说过了，把一个多项式变成因式的乘积以后计算的次数会变少．第二，可以增加信息量．什么叫增加信息量呢？我们通过一个例子解释一下：同样是两个算式，一个是两个变量相加等于0，一个是两个变量相乘等于0，哪个算式给我们的信息多呢？我们要仔细分析一下，这两个算式有什么区别：第一个算式，我们只能知道这两个数字互为相反数，其他信息一概不知；但是第二个算式却可以告诉我们，这两数当中至少有一个数是0．除此之外因式还能带给我们更多信息，我们以后还会讨论．

通过以上描述我们不难发现，因式分解是多项式乘法，是互为逆运算的．然而它们的难度差别却非常大：多项式的乘法非常简单，无论这两个多项式多长，无论有没有公式帮忙，只需要把相乘的几个算式逐项展开，相乘后再相加，总是能够得到正确的结果．但是，当我们面对一个很长的多项式的时候，却很难判断它到底是哪几个因式的乘积．其实这也不奇怪，我们要是对比一下之前学过的算法就会知道，无论是减法、除法还是开方，凡是逆运算都要比加法、乘法和乘方复杂得多．以除法为例：当我们拿着两个数字相除的时候，实际上是在一次次试错，

而且要试很多次才能得到正确答案．这又是为什么呢？按说，这个逆运算不就是把正向的运算反过来吗？它应该跟这个正向运算的难度一样啊？比如我们往东走两步，那么逆运算不就是往西走两步吗？这能有什么本质区别呢？

如果你仔细观察生活就会发现，并不是所有的动作都是可逆的．比如：你只需要轻轻一扯就能把一张纸撕破；但如果你想把撕开的纸再重新粘好，就比撕开它困难很多．再比如，我们把一块糖扔到水里，用勺子一搅拌，糖块很容易就溶解到水里了；但是如果让你把这个勺子反过来转动两下，还能把已经溶解在水里的糖变成一个糖块吗？与此类似的还有：一个人要想不好好学习，沾染一个不良嗜好，往往非常容易；但是你要想戒除这个不良嗜好，重新取得好的学习成绩，那可就太困难了．虽然撕开的纸是可以粘好的，糖也能够从糖水里取出来的，学习差的人也能重新变好，但是这些过程却要困难得多．同理，因式分解的过程也是一样．我们要把一个多项式重新拆成几个算式的乘积，那得学会“相面”的本事！

◎ 学会“相面”：熟记特征

当我们面对一个多项式的时候，究竟应该如何把它分解成多个因式的乘积呢？其实因式分解背后的原则非常简单，只有两条：

第一，根据乘法分配律直接提取公因式．比如$5x+10xy$，我们一看，常数项一个是5，一个是10，可以提取一个常数5，变成$5(x+2xy)$，剩下的两个单项式里，每个都有变量x，我们再把它提取出来，就得到了最终结果：$5x(x+2y)$，我们在这个过程中用到的办法就是提取公因式法．

第二，公式法．就是参考我们刚学的完全平方公式和平方差公式，按照公式的展开的特征，往回反推．比如：x^2-4y^2，我们一看，这个多项式看起来很像平方差公式，于是就可以进一步分析一下$4y^2$能不能转换成一个式子的平方呢？可以，因为4是2的平方，所以$4y^2=(2y)^2$．然后根据平方差公式$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$反推一下，就得到了最终结果：$(x+2y)(x-2y)$．

有时候我们需要把提取公因式法和公式法结合起来使用，比如：在$x^2y+2xy^2+y^3$这个多项式中，每一项都含有变量y，所以我们首先就需要把y提取出来，原式变为$y(x^2+2xy+y^2)$，再仔细一看，括号里的内容符合完全平方公式，进一步分解得到最终结果：$y(x+y)^2$．

但若题目更复杂，多项式的项更多，又该怎么办呢？在前文中我们说过，因式分解要靠“相面”！什么是“相面”呢？其实“相面”的意思就是先观其大略，大概地看一眼，看看这个多项式长得更像哪个公式，然后再仔细端详，一步步地认真验证，确认它是否符合公式的形式．因为我们要学会“相面”的本事，所以对于完全平方公式和平方差公式的特征，一定要烂熟于心．不过既然是“相面”，那就一定会有看“走眼”的时候，如果我们第一眼看错了怎么办？重新修正、继续试错．在生活中，我们看一个熟人都有可能看错了，看多项式看错了有什么奇怪的？知错就改就成了．那么，接下来我们就给多项式相相面吧．

对于一个多项式，我们首先要观其大略，对它先有一个整体的把握．观其大略的时候，我们只需要重点关注两点：第一，看它存不存在公因式，有公因式必须先提取出来．第二，看整个式子是不是都围绕着某个核心算式来转的．什么叫核心算式呢？就是说一大串算式里，总是有一个算式被套在括号里面，在整个算式里窜来窜去的，到处去跟别的算式加减乘除．如果是这样的话，就需要把它看作一个整体，而不要把它乘进去．比如下面的算式：$(x+9)^2-4(x+9)+4$，显然其中的$(x+9)$就是个核心算式，如果我们贸然把它展开，整个算式就会变得异常复杂；但若我们把它当作一个整体来看待，题目就变得非常简单了．如果我们仔细观察一下就会发现这个算式的整体符合差的平方公式，4是2的平方，因此原式等于$(x+9-2)^2$，即$(x+7)^2$．有时核心算式的正负号可能相反，比如：$(x-3)^2+8(3-x)+16$，这个算式中既有$x-3$，又有$3-x$，两者之间互为相反数．我们只要提出个负号来，就可以把$3-x$转换为$x-3$，于是整个算式就变成了$(x-3)^2-8(x-3)+16$，最后我们发现，这也是个完全平方公式，进一步分解得到$(x-3-4)^2$，也就是$(x-7)$的平方．

处理完这两种情况之后，我们就要仔细端详．此时我们的关注重点有三个数：一是项数，二是变量数，三是次数．一般情况下，我们不要过分关注题目中的常数，看见常数，我们首先想的是如何把它分解因式：它是哪个数的平方，还是哪个数的两倍呢？只有这样看问题，才能把握住问题的关键特征，下面我们逐步展开说明．

第一，所谓项数，是指多项式中有几个独立的加减项．如果只有两项，很可能是平方差公式；如果是三项式就可以尝试用完全平方公式解决；如果是四项以上的多项式，那我们就必须得先分组然后再计算，但分组要怎么分呢？这就要参考变量数和次数．以四项式为例：

在$am+bn+an+bm$这个算式中，变量有4个，而且变量分布得很均匀，各项的次数也都是二次．在这种情况下，可能就是两两一组，我们可以选取两个含有公因式的项目组合在一起，比如am和an中都有公因式a，bn和bm中都有公因式b，分组以后提取公因式，得到$a(m+n)+b(m+n)$，此时，$(m+n)$又变成了两个式子的公因式，进一步提取出来，得到$(m+n)(a+b)$．在变量分布比

较均匀的情况下，很可能多次提取公因式后，就能得到最终的答案，如果一次分组不成功，可以尝试一下另一种分组方式．

但若题目中变量的分布不均匀，分组时就需要考虑一三组合．比如：x^2-y^2-1+2y，在这个多项式中，变量x只存在于一个项里，而y在两个项里都有，在这种情况下我们就可以把x先放在一边，把含有y的项和常数项合并到一起，就得到了$x^2-(y^2-2y+1)$，显然，括号里的内容符合完全平方公式，然后我们就可以继续往下拆解得到：$x^2-(y-1)^2$，这个算式整体符合了平方差公式，再次分解得到$(x+y-1)(x-y+1)$．

当然，这并不是说所有变量不均的情况都要做一三拆分，因为一旦做了一三拆分，就必须是完全平方公式和平方差公式的组合了．问题的关键就是要看，单独剩下的一项是不是平方项，另外三项又能不能凑成完全平方公式．如果不能，可能仍需考虑两两匹配的情况．比如：$x^2+xy-x-y$，虽然这里变量x占了三项，y占了两项，但若我们把含x的项都合并到一起，那么含y的项就只剩下了一个y，它和其他算式凑不成平方差公式，同时，含有x的三项也不能凑成完全平方公式，因此我们只能采用两两组合的方式，先把含有y的项组合在一起，在$xy-y$中提取出变量y，剩下$x-1$，在其他两个项中提取出变量x后，仍然剩下$x-1$，于是再次提取公因式，得到最终结果：$(x+y)(x-1)$．

本节介绍了因式分解的整体思路，我们知道了因式分解要通过提公因式法和套用公式法两种方式解决．同时，在面对一个复杂的多项式时，要通过两个式子观其大略，再通过三个数字小心求证．不过，必须提醒你，这些思路都只是一个经验总结，而不是什么放之四海皆准的真理．

比如：$x^2+10x+16$，要提取公因式吧，这三个项里面没有完全一样的变量，想要套公式吧，它又哪个公式都不符合，虽然这个常数项16是4的平方，整体好像能够变成$(x+4)^2$，但若那样，中间的一项就必须等于$8x$，但是原式偏偏就是$10x$，如果看中间的$10x$能拆成$2\times5\times x$，好像又可以转化为$(x+5)^2$，但这样一来呢，常数项就得是25了，但原式的常数项又是16．这样的算式又该如何分解呢？

◎ 十字相乘：分解二次三项式

在前文中，我们介绍了因式分解的两种思路，提取公因式法和套用公式法．我们发现，总是有那么一类多项式无法解决，它既不含公因式，又不能直接套用任何公式，这类题目我们应该怎么求解呢？接下来我们就介绍分解二次三项式的另一种常用办法：十字相乘法．

所谓二次三项式是指多项式有三个加减项，同时各项的最高次数是二次．比如我们上面提到的$x^2+10x+16$，首先，它有三个加减项；其次，它的三个项中，x^2的次数是二，是各项中次数最高的，所以它就是个二次三项式．那么这个多项式怎么分解呢？我们还得先学一个新的公式：$(x+m)(x+n)$，下面我们就把这个公式展开：

$$(x+m)(x+n)$$

$$=x^2+xn+mx+mn$$

$$=x^2+(m+n)x+mn$$

它的结果显然就是一个标准的二次三项式，对$x^2+(m+n)x+mn$进行因式分解，结果肯定只能是$(x+m)(x+n)$．这个题目当然是很容易看出来的，可问题在于，当我们遇到实际问题的时候，这些系数的数量关系不可能那么明显地摆在眼前．比如我们之前提到的$x^2+10x+16$，就是个标准的二次三项式，它又如何通过这个公式分解呢？如果我们把它跟$x^2+(m+n)x+mn$对照一下就会发现，其中的10对应的就是一次项系数$m+n$，数字16对应的就是常数项mn．这就意味着，我们只要找到这样两个数字，它们相加等于10，并且乘积等于16，就可以知道这个因式怎么分解了．那么我们就试试看吧！

好在相加等于10的数字没有几组，比如$4+6$等于10，但是$4\times6=24$，它并不等于16，所以肯定不是这一组数字．同样，$3+7$也等于10，但是3×7也不等于16．接着往下试试，$2+8=10$，巧了2×8正好等于16．所以，这个多项式分解开来就是$(x+2)\cdot(x+8)$，结果对不对呢？我们可以反过来验算一下：如果$m=2$，$n=8$，一次项系数m

$+n$ 是不是等于10呢，常数项mn 是不是等于16呢？没错，所以它们展开相乘以后一定等于$x^2+10x+16$．这种分解因式的方法就叫作十字相乘法，它是根据一次项系数和常数项系数这两个数字反复试错得到的．

接下来我们再试一个：x^2+4x-5，这个多项式怎么分解因式呢？它的一次项系数是4，常数项是－5，请注意，这里的常数项不是5，而是－5，我们不能把负号弄丢了．那么，我们就得找出两个数来，使这两个数字相加等于4，相乘等于－5，4等于哪两个数相加呢？1和3，但是1和3相乘不等于－5．那2和2呢？2×2也不等于－5，那它是不是就不能用十字相乘法分解了呢？4这边找不到，我们就到－5那边碰一碰运气：有哪两个数相乘等于－5呢？－1和5，那么－1和5相加等于4吗？没错，正好等于4，这就对了，所以原式分解因式以后的结果就是$(x-1)(x+5)$．

怎么样，这个十字相乘不算太难吧？可是我们总觉得多少有点瞎蒙的意思，如果这个数字挺大，我们怎么知道哪两个数相加相乘能蒙对呢？比如：$x^2+60x+779$，请你来猜猜，哪两个数相加等于60，并且相乘等于779呢？这两个数字这么大，再这么瞎猜就不行了吧，那怎么办？有什么快速猜数的秘诀吗？接下来我们深入研究一下这个问题．

我们不就是想找出m 和n 来吗？这$m+n=60$，$mn=779$对不对，m 和n 两个数字不好找不要紧，我可以假设$m+n=2p$，同时继续假设$m=p+q$，$n=p-q$，这样它俩相加还是2p，如果我们把p和q求出来了，是不是就很容易找到m 和n 的值了呢？为什么我们要这么考虑问题呢？很简单，因为这p是现成的，因为$m+n=60$，所以，这p就是60的一半等于30，那么q是多少呢？我们再看看m 和n 的乘积，因为$m=p+q$，$n=p-q$，所以$mn=(p+q)\cdot(p-q)=p^2-q^2$，其中$mn=779$，$p=30$，代入得到$779=30^2-q^2$，移项得到$q^2=900-779$，计算得到$q^2=121$，哪个数字的平方是121呢？11的平方，因此，$q=\pm11$，前面我们已经知道$p=30$，所以，$m=p+q=30+11=41$，$n=p-q=30-11=19$．当然，因为$m$、$n$ 的关系是对称的，我们也可以认为$m=19$，$n=41$，因此原式分解以后的结果为：$x^2+60x+779=(x+41)(x+19)$．

让我们重新回顾一下这个过程：为了确认m 、n 的具体数值，我们结合使用了十字相乘法和平方差公式，它可以帮我们快速地找到m 、n 的具体值．当遇到系数很大的时候，我们需要先找到一次项系数的一半p，把它作为m 、n 的中间数，然后用p的平方减去常数项系数，减完以后再开平方就得到差值q，通过p±q就可以确定m 和n 的具体值．不过一般在此类题目中，一次项和常数项的系数都不会很大，通过试错的方法也可以快速地找到答案．

原则上来说，十字相乘法只能解决二次三项式的问题，但实际上，如果某些高次多项式，通过化简可以看作二次式，同样可以通过这种方法解决．比如x^6+2x^3-8，虽然题目存在6次方和3次方，但显然两者之间的关系是平方关系．我们只要把x^3 看作一个整体，同样可以通过十字相乘法解决问题，两数相加是2，相乘是－8，很容易想到这两个数是－2和4，那么我们就可以得到最终结果：（x^3-2）（x^3+4）．

我们在本节学习了十字相乘法，这是一种专门分解二次三项式的方法．在处理过程中，我们只要把一次项系数看作两数之和，把常数项系数看作两数之积，反复试算就可以求得两个数的值，然后就可以让变量分别跟这两个数相加相乘．那么，十字相乘法是不是可以解决所有二次三项式的问题呢？仍然不是，不信我们来看一下这个问题：$x^2+10x+18$，它分解因式的结果是什么呢？按照十字相乘的规则，两数相加是10，两数相乘是18，凑凑数，$2\times8=16$，$3\times7=21$，这18上下够不着，不过看样子这两个数好像是在2和3之间的一个数，那么这个问题究竟应该怎么解呢？

◎ 强行配方：通用分解方法

在前文中，我们介绍了因式分解的常用办法——十字相乘法．十字相乘法是分解二次三项式的一种常用办法，最后我们发现，虽然这种办法很方便，但好像并不能解决所有问题，那么有没有二次三项式通用分解方法呢？还真有，这就是本节要介绍的配方法．

配方法就是强行把一个二次三项式配成完全平方公式，无论它是不是完全平方公式，我们都强制把二次项和一次项拼在一起配成平方公式，因为我们是强配的，所以肯定会凭空增加或遗漏一些内容，最后我们再把多增加出来的东西减下去或者把遗漏的东西补充上．

比如：$4x^2+12x-7$．在这个二次三项式中，$4x^2=(2x)^2$，$12x=2\times(2x)\times3$，如果它们能凑成一个完全平方公式，常数项必须等于3的平方，即等于9．但很可惜，常数项是－7，那怎么办？缺少9，我们就在原式中强加一个9，然后在配完平方以后减去它．接下来我们就按照这个思路处理一下．

$4x^2+12x-7$（强制配上3^2，然后再减去它）

$=[(2x)^2+2\times(2x)\times3+3^2]-3^2-7$（转为完全平方公式并化简）

$=(2x+3)^2-16$（后者可以视为4^2）

$=(2x+3)^2-4^2$（符合平方差公式，继续分解）

$=(2x+3+4)(2x+3-4)$

$=(2x+7)(2x-1)$

配方法是二次三项式的通用解决方法，当我们处理这类问题的时候，有三个步骤：第一步，处理二次项系数，如果二次项系数是负的，可以对整个多项式提取负号，把它变成正的，确定是正的以后，求出二次项系数的算术平方根．第二步，处理一次项系数，首先让一次项系数

除以2，然后再除以刚才求解的算术平方根，最后得到的商，平方后就得到了我们要补的常数项．第三步，在多项式中增加这个常数项，完成配方后，再减去它．当然，在二次三项式中，有可能含有两个变量，对于两个变量的情况，我们只需要处理一个变量的平方项的系数，另一个变量可以当作常数项来看待．

接下来，我们看下面的问题：$-9x^2+24xy-15y^2$．在这个题目中存在两个变量的平方项，而且都是负的，其中x^2的系数9是一个平方数，所以我们就取x当作二次项，把y看成常数项，先把负号提取出去，原式变为$-(9x^2-24xy+15y^2)$，我们继续把9开平方得到3，于是我们就得到了第一个系数．然后我们再处理一次项$24xy$，它的系数是24，我们把它除以2，得到12，再除以刚才得到的算术平方根3，得到4，最后把4平方以后得到16，因为我们把y看成了常数项，所以我们应该增加的是$16y^2$，然后我们再减去一个$16y^2$即可．按此思路可得：

$$-9x^2+24xy-15y^2$$

$$=-[(3x)^2-2\times3x\times4y+(4y)^2-(4y)^2+15y^2]$$

$$=-[(3x-4y)^2-y^2]$$

$$=-(3x-4y+y)(3x-4y-y)$$

$$=-(3x-3y)(3x-5y)$$

$$=3(y-x)(3x-5y)$$

接下来，我们处理一下前面的遗留问题：$x^2+10x+18$．这个多项式中二次项系数是1，一次项系数是10，$10\div2=5$，所以，我们就可以给前面两个算式配上5的平方，然后再减去它，过程如下：

$$x^2+10x+18$$

$$=(x^2+2\times x\times5+5^2)-5^2+18$$

$$=(x+5)^2-7$$

处理到这一步我们发现，我们凑不成平方差公式了，因为7开平方得不到一个整数，但是我们不要忘了7是$\sqrt{7}$的平方，所以结果就是$(x+5+\sqrt{7})(x+5-\sqrt{7})$.

说实话，如果结果不是这么别扭的话，我们就不需要用配方法去解决它了！

上文提到，配方法是解决二次三项式的最通用的办法．截至目前，是不是所有二次三项式的问题都解决了呢？接下来就让我们分类讨论，先看一下相对简单的二次两项式的情况．

如果我们在二次项后面增加个一次项，就变成了ax^2+bx的形式，在这种情况下，我们只要把变量x提取公因式，因式分解就完成了．但如果我们给二次项增加一个常数项呢？比如x^2-5，套用平方差公式，把常数项加个根号开方就可以了，结果是（$x+\sqrt{5}$）·（$x-\sqrt{5}$）．不过这时候我们就要注意了，必须是二次项减去一个数才能凑成平方差公式，如果是加一个数（比如x^2+5），还能因式分解吗？不能！这其实就是二次项能不能分解因式的基本条件，当我们在用配方法的时候，同样可能会遇到这个问题，一个算式的平方加上一个常数，这种情况是无解的．

说完了两项的情况，我们再说三项的情况．以下面的问题为例：x^2+px+q．在这个二次三项式中，我们就需要利用配方法给px配出一个常数项来，让它变成一个完全平方公式，配出来的数是多少，只能是p的一半的平方．所以原式变为$\left[x^2+2\times x\times\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$，进一步化简得到$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$.

此时我们就要注意了：如果这个常数项$q-\frac{p^2}{4}<0$，原式就符合完全平方公式可以继续分解，如果它大于0，就无法继续分解了．由$q-\frac{p^2}{4}<0$，可得$p^2>4q$，也就是说，在二次项是1的条件下，一次项的平方要大于常数项的4倍，才能进行因式分解．如果二次项有系数不等于1，怎么办呢？很简单，我们可以把这个系数当作公因式提取出去之后再配方．

以上，我们讨论了分解二次三项式常用的配方法，配方的关键在于

根据二次项系数和一次项系数求得合适的常数项．讲完了配方法，因式分解的内容我们就讲完了．不过，要再次提醒你的是，因式分解的复杂程度远远高于多项式乘法，要想顺利地解决此类问题，必须要在反复的练习中不断积累经验．

十四　分式运算

◎ 学会问问题：0为什么不能做除数

前文介绍了因式分解的方法，接下来再研究一下分式的计算．由于在小学阶段就学习了分数的加减乘除，所以分式计算其实并不复杂，一直困扰我们的是这样一个问题：0为什么不能做除数呢？在正式讨论这个问题以前，我们先研究一个更为基本的问题，那就是问题应该怎么问？

请问你会问问题吗？当然你的确是可以随意发问的．比如：“树叶为什么是绿的？”我告诉你：“因为树叶中有叶绿素．”

你还可以再问我：“为什么叶绿素是绿色的？”我告诉你：“因为叶绿素要吸收红橙光进行光合作用．”

然后你继续追问：“为什么吸收了红橙光就会呈现绿色？”我告诉你：“因为太阳光中含有多种颜色，红橙光被吸收，绿光被反射出来，就会被你看到．”

……

不知你发现什么问题没有，只要你愿意，可以在任何一句话的前面加一个“为什么”，它就又变成了一个新的问题．但我要告诉你的是，这样的提问方式太随意了，它不是一个好问题，所以你从中也得不到什么真正的知识，得到的只能是见识！对你而言，无论是记住树叶是绿色的，还是记住叶绿素是绿色的，结果都一样，两者全部都是死记硬背的结果，丝毫不能加深你对这个世界的认知．那什么是好问题？两小儿辩日的问题就是好问题．

> 孔子在东游的路上看见两个孩子正在争论太阳的问题．一个孩子认为：早晨的太阳离地面更近，因为早晨的太阳看起来更大，中午的太阳看起来较小，根据我们的常识，同一个物体距离近的时候才会看起来更大，距离远的时候才会看上去小．

而另一个孩子认为：中午的太阳更近，因为早晨的太阳很冷，中午的太阳很热．因为同一个发热的物体离我们越近，带给我们的热量越多，所以肯定是中午的太阳更近．两个孩子争执不下，于是就请教孔子，但孔子也不知道答案．

我们先不关注结果，先分析问题本身：为什么这样的问题是好问题呢？因为这个问题是在深思熟虑的条件下提出的问题，它关注的不是一个孤立的知识点，而是两个相互矛盾的道理．近大远小是一个普遍的道理，近热远冷也是一个普遍的道理，这两个道理在一般场景下都适用，但是在遇到太阳的时候却发生了矛盾．这样的问题一旦得到了解答，得到的结果就不仅是太阳离我们远近的问题，而是背后隐藏的更为深刻的道理．为了答案而提问，好比向他人索要一条鱼；为了道理而提问，得到的才是钓鱼的知识．得到答案只能增长见识，而得到一个道理却可以增长我们的智慧．

有不少同学会问老师0为什么不能做除数的问题．其实，凡是能够问出这个问题的同学都是有智慧的，因为在这些同学的心中，0做除数要么是已经有一个答案的，要么就是已经有一个原因的．不过要想把这个问题用更好的方式问出来，应该先把自己心中的道理讲出来，然后再问为什么．

如果是我来提问，我会这么问自己的老师：“老师，除法就好比把一些物品平均分配给几个人，那么如果让一个数除以0，就相当于一个人都不用分，所以0做除数没有意义的，对不对？”想必这位老师会给出肯定的回答．那么，我真正的问题就出来了：“如果是这样的话，那就不对了．乘法不也是分东西？一个小朋友分得3个苹果，0个小朋友一共分得几个，这个问题不是要用乘法解决吗？如果说0个小朋友就不能分了，那么也应该说3×0没有意义啊？为什么$3\times0=0$就有意义，而$3\div0$就没有意义呢？既然3×0可以等于0，那么我们规定$3\div0=0$不就可以了吗？”这种提问方式是不是就和两小儿辩日一样呢？我不是孤立地问一个$3\div0$等于几的问题，而是通过一个更普遍的道理（乘法）来证明$3\div0=0$是有意义的，而且我给出了自己的答案0．那么这个答案对不对呢？接下来我们就正式分析一下0不能做除数的问题．这个问题不仅让很多同学迷惑，就连历史上的很多数学家也搞不清楚，因为这个问题的答案实

在是太多了．

首先，我刚才给出的第一个解释是拿乘法和除法类比，一个数乘以0和除以0的使用场景是类似的，它们要么应该都等于0，要么应该都没意义，凭什么一个数乘以0等于0，但除以0就没意义呢？

其次，我们还可以把除法和加减法作类比，一个数加减0，就相当于不加不减，不加不减的结果是还等于原来的数字．那么按照这样的规律，如果一个数字除以0，就相当于不用除了，当然应该是等于这个数字本身．

然而，我们还可以找到其他规律，比如任何数字除以本身都等于1，把一些东西分给同样多的一些人，当然就是每人一个了，按这个道理来看，$0\div0$应该等于1．

最后，我们还可以认为：任何数除以0都等于无穷大，因为任何一个数除以0.1就会大10倍，除以0.01就会大100倍，除数越是接近于0，被除数就越是被放大，按此规律发展下去，如果直接除以0，结论当然就是无穷大了．

至此，我们有了四个答案：0，被除数本身，1，无穷大．应该说上面的任何一种分析都有一定的合理性．实际上，如果我们让0在算式中作为分母出现的话，是可以计算出任何一个具体数字的，绝不仅仅只有这4个答案．那么，我们是不是可以认为0做除数的结果可以等于任何数字呢？不能，因为无论我们认为一个数除0以后等于几，我们都无法通过乘法把它还原回来．比如，我们如果认为$2\div0=1$，但是1×0却不能等于2．乘法是除法的逆运算，如果我们通过乘法验算以后得不到原来的结果，我们就可以认为$2\div0$不等于1，即使我们认为$2\div0$等于无穷大，我们也不能认为无穷大乘以0等于2．于是问题又重新出现了，一个数除以0到底等于几呢？

当你提出这个问题的时候，请不妨认真反思一下，你想得到什么呢？如果你想得到的是一个答案，我就可以告诉你一个数除以0可以等于任何一个数字．但如果你想得到的是一个道理，我就要告诉你一个数除以0没有意义没有道理．那么0做除数为什么没有意义呢？我们不能从

纯粹的数学计算去理解，而只能从意义两个字的本身含义去追问，那究竟什么叫作意义呢？

对于一个数学计算而言，我们说1 + 1 = 2是有意义的，5 - 3 = 2是有意义的，这是指在实际生活中，有无数多个实际场景可以用这两个算式来解决．因此我们可以把一个算式当作一个规律来看，当作一个道理来看，因为它可以帮助我们解决无数问题．同时，当这个算式和其他的数学算式进行混合运算的时候，也不会发生任何矛盾．但是，一个数字除以0却不符合这个规则：首先，它不能适用于任何场景，只能适用于若干个孤立的场景；其次，它作为一个算式出现在计算过程中的时候，会使逻辑混乱，导致结果不再是唯一确定的．这样一来，就会使后续的计算过程变得毫无意义，而追究这个无意义的源头，我们终于发现，因为0做除数本身可以得到任意的结果，因此，我们才说0做除数是无意义的．

当我们在处理分式计算的每一步过程中，必须随时关注我们的运算过程，如果在中间的任何一步计算中出现了除以0的情况，那么很可能因此得到一个无意义的结果．那么，在分式计算中还有哪些规律呢？

◎ 奇怪的分式运算：初中代数的最后一个运算法则

分数和除法我们已经非常熟悉了，在小学阶段我们就曾经全面接触分数间的运算法则．

同分母分数相加减，分母不变，分子相加减，如$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，$\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$．

异分母分数相加减，先通分变成相同的分母以后，再进行加减，如$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$．

分数乘法：分子乘分子，分母乘分母，如$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$．

分数除法：把除数分子分母颠倒以后，变为乘法，如$\frac{3}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{7}\times\frac{3}{2}=\frac{3\times3}{2\times7}=\frac{9}{14}$．

那么，分数的上述计算规则背后的原理是什么呢？接下来，我们通过代数算式将其证明：首先，为什么同分母分数才能相互加减？为什么分数相加不能像乘法一样，分子分母分别相加呢？其实，我们应该把任何一个分数都看成一个乘法算式，例如$\frac{b}{a}$，我们可以看成$b\times\frac{1}{a}$，那么同分母的分数相加就符合了乘法分配律，即$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}\times b+\frac{1}{a}\times c=\frac{1}{a}\times(b+c)=\frac{b+c}{a}$．

但是如果是分母不同的两个分数相加，由于整个算式就没有公因式可被提取，因此无法直接计算．

其次，我们应该知道，分数的通分和约分是以除法的协变性为前提的，因为分子分母同时乘除一个数，分数值不变，即$\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac}$，于是当分母不同的时候，我们可以把两个分母不同的分数通分或约分，如$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$．

最后，我们要知道的是，分数的乘法其实遵循的是乘法的交换律和结合律．当我们把除法当作乘法看待以后，原来的分式变成了乘式，两个乘式相乘，顺序当然可以是任意调整的，即$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=b\times\frac{1}{a}\times d\times\frac{1}{c}=bd\times\frac{1}{ac}=\frac{bd}{ac}$．

同时，由于乘法和除法是可以互换的，所谓的分数相除颠倒变相乘，也可以看作分子除分子，分母除分母，这样乘除法的规则就统一了．即$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\div d}{a\div c}=\frac{b\times\frac{1}{d}}{a\times\frac{1}{c}}=\frac{b}{a}\times\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$．

以上就是分数和分式计算的规则．跟加减法及乘法相比，除法的运算确实复杂了很多，正因如此，在实际处理代数算式的时候，只要有可能，我们总是希望把分式处理成整式的形式．比如在处理根式的时候，我们不允许根式中存在分母，也不允许分母上有根式．同时，在处理方程的时候，我们一般也会首先把分式方程化为整式方程，只要我们随时注意分母不为0的禁忌就可以．

下面，让我们处理几个分式问题：

当x 在什么范围时，分式$\frac{2x}{3x-1}$ 有意义？显然，条件是分母不能为0，也就是$3x-1$不等于0，把-1挪到右边，得到$3x$ 不等于1，也就是x不等于$\frac{1}{3}$ ．

化简$\frac{x^2-y^2}{x+y}$ ．显然，分子符合平方差公式，把分子做因式分解，得到（$x+y$）（$x-y$），此时分子分母上同时存在（$x+y$），可以约分，得到的结果是$x-y$ ，当然，由于0不能做除数，所以我们必须明白只有在$x+y$ 不等于0的条件下，我们才能让分子分母同时除以$x+y$ ，那么$x+y$ 有没有可能等于0呢？通过观察我们发现，由于原式中$x+y$本来就是做分母的，所以可以认为$x+y$ 是不为0的，因此结果等于$x-y$ 是准确无误的．

计算$\left(1-\frac{1}{x}\right)^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$ ．当我们面临一个复杂算式的时候，应该先从整体把握，而不是从局部入手．我们一看算式整体符合平方差公式，

它等于两式相加乘以两式相减．而两个式子相加以后，可以把$\frac{1}{x}$消掉，得到$-\frac{2}{x}$；两式相减，可以把1消掉，得到$-x$，两者相乘得到最终结果$-\frac{4}{x}$．

最后，我们求解一道分式方程问题：$\frac{8}{x}-\frac{4}{x+1}=0$．

求解分式方程时，应该先把它化成整式方程．我们发现两个分式的分母不同，就可以在方程两侧同时乘以两个分母的乘积$x(x+1)$，消掉分母后，得到$8(x+1)-4x=0$，把8乘到括号中，得到$8x+8-4x=0$，把$8x$和$-4x$合并同类项，得到$4x+8=0$，方程左右两边除以4，得到$x+2=0$，移项得到最终结果：$x=-2$．由于分式方程有分母不为0的禁忌，所以在计算完成后，我们还必须把$x=-2$代入到原方程中，验证分母是否为0．当$x=-2$时，分母x和$x+1$都不等于0，所以$x=-2$是原方程的根．

在本节中，我们讨论了分式计算的规则．无论分式多么复杂，其基本规则都是不变的，在分式通分约分及加减乘除的过程中，我们会反复遇到多项式展开和因式分解的问题．在处理这类问题的时候，要始终把握住算式的整体，不要过早陷入细节．

学完了分式运算以后，初中代数的所有运算法则，我们就都学完了．我们最早用加减乘除所画下的四行三列的网格也全部填充完整了，我们从最简单的数数开始，讲到负号，讲到等式的规则，讲到加减乘除的基本规律，我们学习了乘方和开方两种基本法则，学习了多项式的展开和因式分解．不知你是否把所有的基本知识都融会贯通起来了．如果没有的话也不要灰心，只要适当地多加练习，很快会全面掌握这些内容．

记得我说过，学习的目的是学会自己不知道什么，如果你现在仍然觉得数学很复杂，我要告诉你的是数学非常简单；但是如果你觉得这些加减乘除的算法很简单，那我要告诉你的是数学很难．用数学知识解决现实问题就像开车走在路面上，开车的技术很简单，但路面的情况很复杂．对于那些把开车本身看得很复杂的人，我要告诉他，开车并不难，只不过就是转向和加减速而已．但对于那些把车开得飞起来的人，我要

告诉他，路况很复杂，什么样的情况都会遇到，如果不保持警惕随时都会有危险．那些让人头疼了几百年的数学问题，都是一些看起来超级简单的问题．这就是数学，它能超级简单地解决一个复杂的问题，也会让你对一个超级简单的问题束手无策．

十五　二次方程及其应用

◎ 二元和二次的区别：如何判断和解决

现在，我们要一起讨论二次方程的问题．二次方程是初中数学的核心知识，前边学习的一切知识，几乎全都是为二次方程做准备的，学会了二次方程，我们就拥有了改变世界的能力．前文已经反复提到，二次方程问题普遍存在于生产生活之中，当我们每一次做出选择的时候，它都会在这些选择的背后潜移默化地改变我们周围的世界．那么，当我们在生活中遇到一个具体问题的时候，如何判断它是不是一个二次方程的问题呢？

首先，需要判断自己遇到的问题是不是一个选择问题．当我们面临一个选择困境的时候，这个问题要么是一个二元问题，要么就是一个二次问题．所谓二元问题，就是指我们要在两个不同的事物间做出选择．这两个选择之间的关系不是特别紧密，比如你现在手里有一笔钱，那么你是买吃的还是买穿的呢？决定了要买穿的以后，你仍然需要选择，是买上衣还是买裤子呢？这都是二元问题，因为买上衣还是买裤子之间没什么必然关系，实际上怎么选择都是可以的．

但是当我们面对二次问题的时候，想做出一个合理的选择就会困难很多，所谓二次问题常常是要对同一个事物的不同程度、同一件事情的不同方式做出选择．比如，卖东西的时候定价定在多少呢？晚上能不能熬夜学习呢？这些就属于二次问题．为什么二次问题都很难选择呢？这是因为，我们做出的选择本身，会再次反过来影响我们选择的目的．我提高价格的目的是为了多赚钱，但是因为提价导致客户减少了，这又会导致我少赚钱，这不是影响了我的目的吗？同样，我熬夜的目的是多学点东西，但是熬夜以后第二天精神状态不好，就会再次反过来影响我的学习．因为我们的选择会再次施加影响，所以就叫二次问题．

我们都知道，含有未知数的变量就叫作方程，因此变量的最高次数等于2的方程就叫作二次方程．下面我们就看一个二次方程：$x^2=4$．这就是一个最简单二次方程，首先它是一个含有变量x的等式，其次这

个变量x 的次数是2，所以它肯定是二次方程．那么这个方程怎么解呢？给4开个方就行，但是不能忘了，开方的结果是有两个解的，所以这个问题的结果是$x = \pm\sqrt{4}$ ，即$x = \pm 2$．一般在这种情况下，我们会把两个解分开，写作$x_1 = 2$，$x_2 = -2$．

那么，二次方程一定有解吗？不一定．比如$x^2 = -4$就没有实数解，因为所有数字的平方都是大于等于0的，所以在实数范围内，-4是不能开方的，我们自然就不知道x 等于多少了．那么，如果$x^2 = 0$呢，显然它就只有一个解$x = 0$，如果我们把这些数字转换成字母，那就变成了最简二次方程的一般形式．

当遇到$x^2 = c$ 的问题时，我们要先讨论常数项c 的取值范围．当$c > 0$时，方程有两个实数根，分别是$x_1 = \sqrt{c}$，$x_2 = -\sqrt{c}$ ；当$c = 0$时，方程只有一个根$x = 0$；当$c < 0$时，方程在实数范围内无解．

下面我们增加一下难度，为二次项增加一个系数a ，方程就变成了$ax^2 + c = 0$，此时，我们首先应该把c 移到方程右边，得到$ax^2 = -c$，然后在方程左右两侧同时除以a ，消去二次项的系数，得到$x^2 = -\frac{c}{a}$，这样一来，方程在形式上就是x^2 等于常数的形式了，继续分情况讨论$-\frac{c}{a}$ 的取值范围就可以求解了．

可见，在处理二次方程的时候，移项、合并同类项、消除系数的这些基本知识，全部都是可用的．遇到任何问题，我们都得先化简，然后求值．

看起来，如果只是增加二次项系数，问题并不难解决．但是如果这二次方程里边有了一次项系数又会如何呢？比如：$x^2 - 6x + 9 = 0$，这个方程怎么解呢？我们一看，这个方程左边符合完全平方公式，于是我们就可以把它转变为$(x - 3)^2 = 0$的形式，这样一来，原方程就又变成一个算式的平方等于几的形式了．$(x - 3)^2 = 0$，那就说明$x - 3 = 0$，所以x 只能等于3．

有了完全平方公式，解决二次方程好像也不困难，可是一旦方程的系数稍微有一点变化，问题就复杂了．比如：$x^2 - 6x + 5 = 0$，我们只

是修改了常数项，这个方程又应该怎么解呢？这时候就需要因式分解来帮忙了．为什么因式分解可以帮我们解决二次方程的问题呢？因为经过因式分解以后，变成两个式子的乘积，如果两式相乘等于0，必须要这两个式子之一等于0才能满足．我们给左边的式子做个因式分解，用十字相乘看看，有没有哪两个数相加等于－6，相乘等于5呢？－1和－5可以，所以原方程分解因式以后就是（x －1）（x －5）＝0，等式成立，必须让两个因式分别等于0了．由x －1＝0可以得到$x_1=1$；由x －5＝0可以得到$x_2=5$．

以上就是通过因式分解求解二次方程的方法．需要注意的是，我们做因式分解的时候，必须得把所有的项都移到方程左边来．如果因式分解完了以后，等式右边还有数字，那可就白费劲了，如果这两个式子相乘要是等于4，那我们就无从判断每个算式分别等于多少了，因为相乘等于4的数字有无数对．只有两式相乘等于0时，我们才能继续求解．从这里，我们可以再次领略到数字0的神奇魅力．

通过分析，我们发现：利用公式法和因式分解对二次方程求解，根据系数和常数项的取值范围不同，二次方程的解可能是一个、两个，甚至可能没有解．

◎ 给商品定价：一个二次方程问题

现在，我们就运用二次方程来解决一些具体问题．如商品定价问题，就属于二次方程问题．

假如我们是商店的老板，有一种商品的进价是20元，如果一分钱不赚地卖出去，每个月最多能成交1000单，但这样肯定不赚钱；然后我们就要提高价格，假设每提高1元钱，就会少来100个人，请问应该如何定价才能保证每个月赚2100元呢？

下面我们就来尝试解决这个问题．假设利润是x元，因为每增加1元钱，就少100个客户，所以当利润是x元的时候，就会少来$100x$个人，那原来最多有多少人呢？有1000个；现在的客户数呢？就是$1000-100x$．同时，因为每件商品的利润是x元，所以每个月的总利润就是$(1000-100x)x$，它等于多少呢？我们希望每个月赚2100元，当然它就等于2100了．这样我们就列出了方程式：$(1000-100x)x=2100$．

那这个方程怎么求解呢？首先我们把方程化简一下，先把方程左右两边除以100，得到$(10-x)x=21$，把左侧的乘式展开，得到$10x-x^2=21$，把21从方程的右侧移到左侧，改为-21，得到$10x-x^2-21=0$，左右两侧除以x^2的系数-1，把它变成正的，得到$x^2-10x+21=0$．

方程简化处理干净了，接下来就对左侧的多项式做分解因式．先用十字相乘法试一试，哪两个数字相加等于-10，相乘等于21呢？$3\times7=21$，但3和7加起来是10，不是-10，所以应该是-3和-7．于是，我们的方程就变成了$(x-3)(x-7)=0$，分别让两个因式等于0，得到当$x-3=0$时，$x_1=3$，当$x-7=0$时，$x_2=7$．

方程的两个解意味着什么呢？这就是说无论我们把利润定在3元还是7元，都可以满足每个月赚2100元的任务．验证一下是不是呢？当我们赚3元的时候，客人少来300个，变成了700个，结果是$3\times700=2100$．当我们赚7元的时候呢，客人少来了700个，变成300人，结果是

7×300，同样是2100元．

一元二次方程有两个根是有好处的，它可以让我们的选择更加自由，如果我们想做高端店，就可以把东西卖贵点，把服务提升一点，重点服务那些尊贵的客人；如果你希望为广大人民群众服务，也可以把东西卖便宜点．

至此，悬而未决的定价问题终于得到了解决．这个二次方程还不错，它真能帮我解决具体问题．可是，这个二次方程求解一定要用到因式分解吗，有没有什么更简单通用的办法求解呢？还真有，接下来我们就一起研究一下解决标准一元二次方程的求根公式．学会了求根公式以后，就再也不需要因式分解了，直接把方程的系数代入到求根公式里，方程就迎刃而解．

不过，在解题之前，我们首先要认识一下二次方程的一般形式．什么叫作一般形式呢？就是常见形式、标准形式．换句话说，即便原来的方程的形式与此不同，也可以通过移项、合并同类项转成这样的形式．一个标准的二次方程是由二次项、一次项和常数项三部分组成的．假设二次项系数是a，一次项系数是b，常数项是c，于是就得到了一个这样的标准方程式：$ax^2+bx+c=0$．

接下来，用配方法对这个方程式求解．首先，我们要在方程的左右两边同时除以a，得到$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$．由于一次项系数是$\frac{b}{a}$，要想把它配成完全平方公式，那个常数项就得是它的一半的平方．它的一半是$\frac{b}{2a}$，平方以后就是$\frac{b^2}{4a^2}$，我们在方程两边都加上一个这样的算式，得到$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$，左边的三项配成完全平方公式，得到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$，把左侧的常数项$\frac{c}{a}$移到右侧，得到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$，右侧通分合并，得到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，方程符合一个平方等于一个常数的情况．开方得到$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$，把右侧根式中的分母开方移到根式外：$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，最后，再把方程左侧的常数项移到右侧，得到$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

于是，我们终于得到了标准的一元二次方程的求根公式．以后无论

遇到什么样的二次方程，只要先把它转换成标准形式，找到与a、b、c对应的系数分别是多少，然后再把系数代入这公式里头，就可以求解．

比如：$x^2+5x+4=0$这个方程的解是什么呢？我们把它和$ax^2+bx+c=0$对比一下发现：二次项系数$a=1$，一次项系数$b=5$，常数项$c=4$，把这三个数代入到求根公式内，就得到$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}$，分解得到$x_1=\frac{-5+3}{2}=-1$，$x_2=\frac{-5-3}{2}=-4$．

我们利用二次方程解决了一个定价问题，还一起推导了二次方程的求根公式，只要记住了这个求根公式，即使不懂因式分解，也能对一个二次方程求解了．不过，我们今天求的这个定价问题，并不让人满意，有人会说了，既然这个二次方程这么好用，我们为什么一个月才赚2100元呢，我不能一个月赚个三五千元吗？

◎ 怎样最赚钱：有解和无解

接下来，我们先回顾一下这个问题：我们是开店的老板，有一种商品的进价是20元，如果一分钱不赚卖出去，每个月最多成交1000单，但这样肯定不赚钱，所以要提高价格，假设每提高1元，就会少来100个人，那么要如何定价才能每月赚2100元呢？上次我们对这个问题求解，得到的结论是卖3元钱或者7元钱都可以．这时候有人就会想到了，我凭什么一个月只能赚2100元呢？既然二次方程这么好用，我不能一个月赚5000元吗？那么接下来我们就试试，如何定价能让这件商品一个月赚5000元．

仍然是假设自己的利润是x元，来的客户数仍然是（$1000-100x$），总利润是5000，于是我们就得到了方程式：$x(1000-100x)=5000$，左右两侧除以100，得到$x(10-x)=50$，移项变号，得到$x^2-10x=-50$，为左侧配方，在左右两侧增加25，得到$x^2-10x+25=-50+25$，化简得到$(x-5)^2=-25$．

一个数的平方是-25，这怎么可能呢？因此要想通过这种商品一个月赚5000元无论如何是做不到的．看来贪得无厌是不行的．那么，当我们面对一个二次方程的时候，我们怎么判断它有没有解呢？要想了解这个问题，我们还得把二次方程的求根公式翻出来：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．

所谓有解，就是要让这个公式有意义，那这个公式里边的重点又是什么呢？第一个是分母不为0，第二个是根号里头的数必须得不是负数．分母不为0无须判断，为什么呢？因为分母是$2a$，a可是x^2的系数，如果a等于0了，整个算式不就没有x^2这一项了吗？没有x^2它也就不是二次方程了，所以这个a不等于0的问题是无须考虑的．因此就只剩下这么一个问题了，根号里的东西必须大于等于0，即$b^2-4ac\geq 0$．这个代数式就是用于判断方程是否有解的，因此它又叫二次方程的判别式：

当$b^2-4ac>0$时，原方程有两个解；

当$b^2-4ac=0$时，原方程有一个解；

当$b^2-4ac<0$时，原方程无解．

我们刚才的定价问题里边，a、b、c都是多少，我们只要看一下中间这个简化方程就可以了：$x^2-10x+50=0$．其中x^2的系数是1，也就是$a=1$，x的系数是-10，也就是$b=-10$，还有一个50是c的值，因此，$b^2-4ac=(-10)^2-4\times50=-100$．

所以这个方程肯定是无解的！一再强调方程什么时候有解有什么用呢？我就想知道怎么样定价才最赚钱！接下来，我们就一起研究一下这个问题．

在上题中，我们赚的总钱数是多少呢？是$(1000-100x)x$，那么什么叫最赚钱呢？最赚钱就是在什么条件下这个代数式的值最大．可是谁能一眼看出来$(1000-100x)x$最大值是多少呢？不要紧，我们照样可以采用配方法求解，首先，我们把这个算式展开，变成$1000x-100x^2$，提取公因式，把-100拎出去，得到$-100(x^2-10x)$，对括号中的部分配方，得到$-100(x^2-10x+5^2-5^2)$，化简得到$-100(x-5)^2+2500$．

要想让这个算式取得最大值，必须让$(x-5)^2$取得最小值，它的最小值是0，所以整个算式的最大利润就是2500．

以上我们用配方法求得了二次式的最大值，那么有没有更简单的办法让我们求出极值呢？可否像求根公式一样，也给我一个标准的二次三项式求极值的公式呢？那我们就一起来分析一下吧．

ax^2+bx+c有没有最大值或者最小值呢？我们仍然需要对这个代数式进行配方，我们首先把a作为公因式提到外边，得到$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$，根据一次项的系数$\frac{b}{a}$，配方得到$a\left[x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$，化简得到$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$．

此时，这个代数式只有一个平方项和一个常数项了，于是，我们就可以讨论条件了，我们知道，因为平方项的最小值是0，所以，当平方

项为0时，该式可以取得极值$c-\frac{b^2}{4a}$，平方项为0意味着：$x+\frac{b}{2a}=0$，即$x=-\frac{b}{2a}$．那么，$c-\frac{b^2}{4a}$究竟是它的最大值还是最小值呢，这要取决于系数a的取值范围：当$a>0$的时候，这个数值就是它的最小值；当$a<0$的时候，这就是它的最大值．

以上就是标准二次式的极值条件，当遇到具体问题时，我们同样只需要找到a、b、c对应的数值，然后按照极值表达式把数值代入，就可以求得最大值或者最小值．

以商品定价的问题为例：赚钱的总数为$1000x-100x^2$，其中二次项系数a是-100，一次项系数b是1000，c是0，因为$a<0$，所以它有一个最大值，最大值为$c-\frac{b^2}{4a}=0-\frac{1\ 000^2}{4\times(-100)}=\frac{1\ 000\ 000}{400}=2500$．

结果仍然是2500元，跟刚才我们用配方法得到的结果是一样的．那么我们的利润定在多少钱才能赚2500元呢？当$x=-\frac{b}{2a}$的时候，b是1000，a是-100，$2a$就是-200，因为前头还有个负号，所以结果就是$1000\div200=5$．也就是说商品的利润定在5元钱时，该商品的利润达到最高点2500元．

我们介绍了二次方程有解的条件，那就是判别式$b^2-4ac>0$；我们还介绍了二次式的极值条件，当$x=-\frac{b}{2a}$时，代数式可以取得最大或最小值$c-\frac{b^2}{4a}$．在我们的学习过程中，你是否感受到了二次方程的重要性呢？

◎ 最后一个问题：学习应该熬夜吗

在前文中，我们以定价问题为例，讨论了二次式的极值问题．我们发现，对于一个标准的二次式ax^2+bx+c而言，当$x=-\frac{b}{2a}$的时候，会取的一个最大值或者最小值$c-\frac{b^2}{4a}$．如果$a>0$，这个数值就是它的最小值；如果$a<0$，这就是它的最大值．当遇到具体问题时，我们只需要找到a、b、c对应的数值，然后按照极值公式把数值代入，就可以求得具体数值了．现在，我们就来看一看，这个极值在实际生活中的应用，我们要分析的第一个问题是：学习应该熬夜吗？

我们可以假设自己每天需要8个小时睡眠，如果你把用于睡觉里的x小时挤出来学习，那么每天就会多学x点的知识．但是由于你睡觉少了，精神不够，第二天就会在课堂上犯困，导致你少学一点东西．我们假设每天正常的学习时间是10个小时，由于我们挤占了x小时，因此第二天学习时间就是$10+x$；但问题在于挤占了睡觉时间后就不可能精力充沛，熬夜以后，你的睡眠时间变成了$8-x$个小时，我们用$8-x$除以正常睡觉的时间8小时，得到的就是自己的睡眠质量．

我们假设第二天的学习质量等于你的睡眠质量，那么你第二天学习的总体效果就是学习时间乘以学习效率．也就是$(10+x)\frac{(8-x)}{8}$，展开并整理为标准的二次式得到$-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+10$．

在这个代数表达式中，x^2的系数$a=-\frac{1}{8}$，x的系数$b=-\frac{1}{4}$，常数项$c=10$．因为a小于0，所以这个代数式是有最大值的，什么时候最大呢？当$x=-\frac{b}{2a}$的时候，把$a=-\frac{1}{8}$，$b=-\frac{1}{4}$代入该式，得到$x=-1$．当$x=-1$的时候最为有利．这就意味着：对于每天学习10个小时的学生而言，不需要再去挤占可怜的睡眠时间了．

平常我们总说身体很重要，睡眠很重要，不能保障休息就不能保障第二天的学习，因此熬夜是有害无益的．现在，我们总算通过数学方式证明了，事实的确如此！当然，在这个模型中，我们还只是考虑了第二天的学习效果，并没有考虑睡眠不足对身体的影响．如果考虑健康因

素，我就更不建议你熬夜了．接下来我们再看第二个问题，开车的速度问题．

关于汽车的油耗问题，基本情况是这样的：我们把汽车启动起来以后，即使停在原地不动，也会固定地消耗一些汽油；如果你行驶起来，随着速度越来越快，耗油量也就会越来越多．油耗的增加主要有两方面原因，一是因为车在路面行驶的时候受到地面的摩擦阻力，会消耗一部分能量；二是因为车开快了以后空气的阻力变大，也会消耗一部分能量．

我们假设，车的百千米耗油量y跟速度x之间符合这样的关系：$y=\frac{1}{1\ 600}x^2-\frac{1}{10}x+8$．

那么，车开多快的时候百千米耗油量最低，它的最低耗油量又能达到多少呢？由于耗油量的表达式属于二次式，因此我们可以直接套用二次式的极值公式．在原式中：x^2的系数$a=\frac{1}{1\ 600}$，x的系数$b=-\frac{1}{10}$，常数$c=8$．根据极值条件我们知道，因为a的系数是正的，所以当$x=\frac{b}{-2a}$的时候．可以取得最小值$c-\frac{b^2}{4a}$，我们把具体数字代入两个表达式中：$x=\frac{b}{-2a}=\frac{-\frac{1}{10}}{-2\times\frac{1}{1\ 600}}=\frac{800}{10}=80$，即速度为80千米/时最省油，油量为：$c-\frac{b^2}{4a}=8-\frac{\left(-\frac{1}{10}\right)^2}{4\times\frac{1}{1\ 600}}=8-\frac{400}{100}=8-4=4$．

通过上述计算可知，当车速80千米时，百千米最低耗油量是4升．当然了，这两个速度只是理论计算，并不适合所有的车型．当遇到具体问题时仍需具体分析．我们在这里呢，只是让大家体验一下极值的应用．接下来，再看一个玩手机的问题：

假设你的手机上有100个图标，那么把这些图标分成几个分类最合适呢？我们假设每一屏能放20个图标，那么100个图标就能放5屏．一般来说，一个人看清一个App的时间是0.1秒，移动翻屏的时间是0.5秒，那么在没有分类的条件下，平均打开一个App的时间是多少呢？因为我们不确定要打开哪个App，我们可以以中间的App为准，打开它的时间

就等于从第一个图标看到中间的一个，这其中我们要看50个图标，要做两次翻屏操作．平均时间就是$50\times0.1+0.5\times2$，$50\times0.1=5$，$0.5\times2=1$，一共是6秒．那么，如果我们在桌面上添加了x个分类呢？

首先，我们需要找到对应的分类，打开这个分类后才能找到自己所需的图标．我们假设看清一个分类的时间是0.2秒，如果我们按中间的一个分类算平均时间，那么找到分类的平均时间就是$0.2\times\frac{x}{2}$秒．找到分类以后，打开这个分类需要0.5秒，最后再从这个分类下去找自己所需的图标，它的图标平均有多少个呢？因为一共有100个图标，而我们又做了x个分类，所以每个分类下就有$\frac{100}{x}$个，然后在$\frac{100}{x}$个图标中找到所需图标需要的平均时间又是多少呢？同样需要按中间的图标来算，因为看清一个图标需要0.1秒，所以在分类下找到所需图标的时间共需要$0.1\times\frac{100}{2x}$秒，最后把这些时间加起来就得到$0.2\times\frac{x}{2}+0.5+0.1\times\frac{100}{2x}$，我们把算式化简一下，得到$\frac{x}{10}+\frac{5}{x}+0.5$，但这个算式是一个分式方程，并不是二次式，不能套用极值公式，那怎么办呢？回到问题的原点，我们仍然采用配方法来解决它，因为x肯定是大于0的，于是我们就可以给它强制的配方了．

我们可以认为$\frac{x}{10}=\left(\sqrt{\frac{x}{10}}\right)^2$，并且$\frac{5}{x}=\left(\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^2$，这样一来，原式就可以化为$\left(\sqrt{\frac{x}{10}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^2+0.5$．

为什么我们要这么处理呢？因为我想把它配成一个完全平方公式，如果我在a^2+b^2中间增加一个$-2ab$，就可以把它强制配成了$(a-b)^2$．按此规律，可以把原式转换为$\left[\left(\sqrt{\frac{x}{10}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{10}}\sqrt{\frac{5}{x}}+\left(\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^2\right]+0.5+2\sqrt{\frac{x}{10}}\sqrt{\frac{5}{x}}$，化简，得到$\left(\sqrt{\frac{x}{10}}-\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^2+(0.5+\sqrt{2})$．

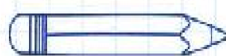
现在，整个这个算式就变成了一个算式的平方加上一个常数了，那么什么时候它的值最小呢？显然，当平方的结果等于0的时候结果最小，算式等于0，就意味着$\frac{x}{10}=\frac{5}{x}$，等式两边乘以$10x$，得到$x^2=50$，由于$x>0$，所以可知$x=\sqrt{50}\approx7$．

也就是说，如果你有100个App，把桌面上的图标分7个分类效率最

高．那么这时候，我们找一个App的平均时间是多少呢？等于$\sqrt{2}$ + 0.5秒，大概是两秒钟不到．当然了，桌面上只有7个分类，有点浪费了，那你还可以把最常用的几个图标单独放置桌面，这样速度就更快了．

在分析了这三个实际应用以后，你有什么感受？如果你能够因此感受到数学的魅力，我会感到非常欣慰．但一定也有人会有这样的想法：生活一定要这样刻板吗？难道连手机图标的分类也值得用方程式算一算吗？我们费这么大劲，结果不就是7个分类最方便吗？为什么不可以直接告诉我这个答案呢？如果你要这么理解，我首先要严肃地告诉你，其实上面的结论，全部都是错的，因为我们是在一系列假设的前提下推出的这个结论，在实际应用中，如果这些假设条件变了，结果也就变了．

此外，我认为数学的奇妙之处并不在于找到答案的那一刻，而在于不断思索的过程中．在我们生活的世界上，从来就有这么两类人，有些人钓鱼是为了吃饱，他们的目的在鱼；而另一些人钓鱼则是为了消遣，他们的目的在于山水之乐．那么，你学习数学的目的又是什么呢？是用数学解决实际问题，还是通过问题来感受数学的快乐呢？我们在数学中之所以能够感受到快乐，是源于数学之美．

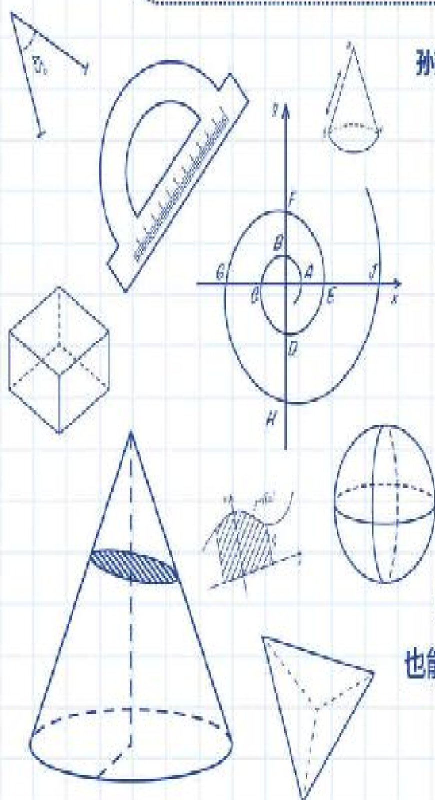


MATH

学好数学并不难

孙亮朝 / 著

几何



IT爸爸写给孩子的数学书

用故事解释数学思想

用案例引入数学知识

用生活讲解数学应用

好看好学、易懂易学

数学成绩不好的父母也能教出100分的孩子

浙江人民出版社

学好数学并不难
几何

孙亮朝　著

浙江人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

学好数学并不难．几何／孙亮朝著．--杭州：浙江人民出版社，2020.5

ISBN 978-7-213-09433-0

Ⅰ．①学…　Ⅱ．①孙…　Ⅲ．①几何课—初中—教学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第182361号

学好数学并不难．几何

孙亮朝　著

出版发行：浙江人民出版社（杭州市体育场路347号　邮编310006）

市场部电话：（0571）85061682　85176516

责任编辑：王　燕

特约编辑：陈帷宏　孟庆博

营销编辑：陈雯怡　陈芊如

责任校对：杨　帆

责任印务：聂绪东

封面设计：Amber Design琥珀视觉

电脑制版：北京唐人佳悦文化传播公司

印　　刷：北京阳光印易科技有限公司

开　　本：710毫米×1000毫米　1/16

印　　张：13.5

字　　数：143千字

插　　页：1

版　　次：2020年5月第1版

印　　次：2020年5月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-213-09433-0

如发现印装质量问题，影响阅读，请与市场部联系调换。

目录

CONCENTS

自序

一　致家长：当孩子学数学时，学的是什么

◎ 数学，学的是情商和智商

◎ 永远不要直接教孩子做题

◎ 知难而喜：培养孩子独立解决问题的能力

二　奇妙的几何学

◎ 没有数字的数学

◎ 一根细线量土地

◎ 学习数学就是构建逻辑思维体系

三　世界就是点、线、面

◎ 点、线、面到底是什么

◎ 点、线、面里的生活哲学

◎ 几何学的5条公理

四　初窥几何证明

◎ 解决直角的牛皮：角度和垂直

◎ 世界上第一个几何证明：对顶角相等

◎ 让数学家头疼了2000多年的问题：平行公理

◎ 让分土地的工作大大简化：平行线的证明

五　从分土地开始

◎ 分土地，先关注三角形的内角和外角

◎ 著名的三线合一定理

◎ 一个谁都明白的道理：两点之间直线段最短

◎ 用复杂的过程证明简单的道理

◎ 三角形全等，该怎么证明

六　尺规作图

◎ 摆脱牛皮的束缚，自由平分土地：中垂线

◎ 几何图形和加减乘除的关系

◎ 角平分线

◎ 用尺规作图解决生活中的问题
七　任意土地的平分
◎ 平行线间的距离和任意形状的面积问题
◎ 面积定理：掌握世界上所有图形的变换方法
◎ 保持面积相等的转换规律：角边角判定定理
八　几何证明的思路
◎ 双向思考：任何一种固定的解题思路都是靠不住的
◎ 动态看图：迅速找到核心内容
九　图形缩放
◎ 相似定理，你必须知道这三点
◎ 判断相似三角形的三个条件
◎ 尺规作图之乘除法
十　圆
◎ 圆和角的关系和几何学的三大难题
◎ 圆和直线的关系
◎ 几何作图之乘方开方
十一　解析几何基础
◎ 从几何学开始，重新认识世界
◎ 一只蜘蛛引出解析几何的发现
◎ 平面直角坐标系
十二　函数图像
◎ 函数到底是什么
◎ 函数就是加减乘除
◎ 线性函数：通过解析几何解决实际问题的方法
◎ 线性函数的应用：代数问题和几何问题
十三　二次函数
◎ 勾股定理：代数知识和几何知识的巧妙结合
◎ 二次函数曲线：解析几何能提供哪些帮助
◎ 抛物线的移动
十四　函数变换
◎ 函数的加减法
◎ 函数变换的本质：各自发生毫无影响的自然规律
◎ 函数的乘法和灯塔背后丰富的世界

十五　最后的总结

◎ 让数据告诉我们宇宙的过去和未来

◎ 数学是这个世界的普遍真理吗

返回总目录

自序

调查显示，很多人讨厌数学．这样的结果并不让人感到意外，因为在传统教育体制的束缚下，数学被教条化甚至被妖魔化了，大家所认识的数学只是课本上的数学、试卷上的数学，是僵化的数学．在我看来，这个世界上应该只有两种人：一种是喜欢数学的，另一种是不知道自己喜欢数学的．因此长久以来，我一直在积蓄一种力量，期望通过自己的努力，把真正的数学呈现在孩子们的面前．

人类天生就有极大的好奇心和求知欲，这驱使我们仰望星空，从日月星辰的运转中捕捉数学的韵律；让我们亲近自然，从四季变换中寻找生命的价值．这是一种欲望，让我们不再满足于眼前的物质利益；这是一种理想，让我们在求真求美的过程中构造起一个全新的精神世界．

数学不是抽象的符号，而是一种真实的存在．数学带来的真实感超越了我们自身，超越了我们所熟悉的一切．这种真实感曾让我一度像毕达哥拉斯一样，认为数是这个世界的本原．然而我还是克制自己，因为我不希望在认识世界之前，妄言对世界的改变．

数学是美的，这是一种超凡脱俗的美，是高冷到不食人间烟火的美，任何一个热爱数学的人都能感受到它．很多人都曾试图描述数学之美：有人通过斐波那契数列的奇妙来描述，有人通过分形图案的精美来描述，有人通过生物百态来描述，也有人通过宇宙的和谐来描述．然而我认为，所有这些都不足以代表数学的美，数学的美是与生俱来的，与它的真实性无关，与它的实用性无关．

一块金子加一块金子可以得到两块金子，一颗沙粒加一颗沙粒可以得到两颗沙粒．然而，数学的价值并不因为计算黄金而变得昂贵，也并不会因为计算沙粒而变得卑贱．荷花上的数学和淤泥中的数学没有不同，宫殿里的数学和沟渠里的数学也无区别．

我一直希望能够用最优美的线条来勾勒数学之美，但数学之美却没有外形；我一直希望用最柔美的乐曲来为数学之美做铺垫，但数学之美没有声音．连接理论与实际，面向历史与未来，从此，数学具有了生命

和活力，它不再是枯燥的公式和定理，不再是乏味的函数和方程，它是花瓣上闪耀的露珠，它是蝴蝶舞动的翅膀．它架构起孩子认知世界的舞台，它赋予我们征服世界的力量．我常把数学比作钻石，钻石本身不会发光，它折射出的是太阳的光彩；数学本身也并不完美，它呈现出的是人类的智慧．

一　致家长：当孩子学数学时，学的是什么

◎ 数学，学的是情商和智商

现在全国每年有1500多万个孩子升入初中，这些孩子分布于全国各地，他们有着各自不同的家庭环境，家长对孩子的关注点也不尽相同．除了关心孩子的身体健康之外，有人关注孩子的综合素质，关注孩子的能力；有人关注孩子的考试成绩，关注孩子的分数；有人更关注孩子的生活，关心孩子的情感，关心孩子是不是每一天都幸福快乐．这些都体现着家长对孩子无微不至的关爱，但无论家长关注什么，都必须重视孩子的数学学习．

首先，如果家长关注孩子的能力，那么家长需要知道，孩子在大部分课程中学的都是知识，只有两门课程直接对应着孩子的能力．第一就是语文，它对应着孩子的沟通表达能力；第二就是数学，它对应着孩子的逻辑推理能力、分析判断能力．无论是在工作中还是在生活中，我们无时无刻不需要作出自己的分析判断，面对同时要做的两件事情我们怎么选择？选择好后，具体目标怎么确定？定好了目标，用什么方式去做？选择哪些伙伴？需要哪些外部资源？……所有的一切都需要分析判断．有人说，不对吧，我们作分析判断的时候，用的都是相关专业的具体知识．不错，我们作出任何一个判断的时候，都需要相关知识的帮助，但是只有具备良好的数学素质、良好的逻辑推理能力，我们才能轻松驾驭这些知识．为什么数学这么重要呢？因为数学不仅仅是知识，更是承载所有其他知识的框架．

其次，如果家长关注的只是孩子的分数．那么家长需要知道，数学是一个系统性的学科，数学知识具有复杂严密的结构，数学学习具有高度的延续性．孩子在学习历史、地理、生物、政治这些学科的时候，如果中间间断了两个月没有学习，几乎不会影响他对后续课程的学习：唐朝的历史没学好，不会阻碍他学习明朝的历史；初中的时候没有学习地理，丝毫不影响他工作以后再学习地理．但是，学习数学时情况却不是

这样，如果孩子没有学会多项式的乘法，他不可能学会因式分解，更不可能学会二次方程．因此在初中阶段，一个孩子学习历史、地理、生物、政治等课程的时候，可能长期保持七八十分的水平．但是，没有人在学习数学的时候能够长期保持这样的水平，如果孩子在初一的时候只能考七八十分，那么初二就是五六十分，初三就是三四十分．如果初中的时候，孩子没有好好利用自己的时间，系统地掌握这门课程，恐怕他以后很难有机会完整地学习数学了．

最后，如果家长关注孩子的生活，关心孩子是否快乐，那我要告诉家长，初中数学和我们平时的生活有着非常密切的联系，它是一门非常实用的学科．关于这一点，恐怕大多数家长都很难认同，这些家长认为，我们平常在生活和工作中用到的数学只不过是小学的四则运算，初中的代数、几何好像从来都没有用到过．因为很少用到，所以大部分家长早已把这部分知识忘得差不多了．但也正因如此，我才更需要强调数学的实用性．我的“学好教学并不难”这个系列课程，会涉及大量的工作生活中的实际问题，学了以后你就会发现，原来那些看起来不是数学问题的问题，背后隐藏的都是简单的数学规律．

现在社会上普遍存在这样一种观点，情商比智商更重要，只要孩子的情商高，在社会上到处都会有朋友，遇到任何难题都会有人帮忙，甚至不用自己去做什么，就会有人帮忙解决问题．的确，我们无法否认情商的重要，更不能否认朋友的重要．然而，我们要知道的是：人类最大的无知不在于你不知道什么，而在于你不知道自己不知道什么！这句话说起来有点绕，但蕴含的道理却非常简单，那就是：我们普遍缺乏的是发现问题的能力．在实际生活中，我们在遇到问题的时候，往往会根据常识、习惯作出判断（而有时这样作出的判断是错误的），我们会误以为自己知道问题的答案，误以为自己没有遇到问题．对于一个不知道自己无知的人，就算有再多的朋友，也帮不上什么忙．

从平常的生活常识到顶级的科学难题，最难的都是发现问题！我们先以科学问题为例：人类在月光之下生活几十万年了，我们什么时候问过自己，月亮为什么不掉下来呢？从来没有人这样问过自己，直到牛顿发出这样的疑问（并且很快他就找到了答案）．所以，发现问题要比解决问题难得多．接下来我们再以生活琐事为例：“请问你的手机图标该不

该分类？”“你的衣服应该怎么洗？”“你出去玩的时间怎么安排？”“你卖东西价格怎么定呢？”甚至是“孩子挨打了该不该还手呀？”关于这些问题，很多人会不假思考地给出一个答案．但是，我要告诉你，这些都是数学问题，只是你不知道自己不知道而已．情商高，可以帮助一个智商高的孩子取得更大的成就，但情商高不能帮助一个无知的孩子幸福地生活．只有学习数学，才能够让我们发现自己的无知，能够让我们具有发现问题、分析问题、解决问题的能力．

以上，我们一起讨论了数学的重要性，从上面的分析可以知道，无论家长关心的是孩子的能力、分数还是情感，都需要重视孩子的数学学习．因为，人类最大的无知，是不知道自己不知道什么！但是，我同样需要说明的是：我这里强调的数学，不只是书本上的数学，我强调的学好数学，也不只是必须要让我们的孩子拿高分！那么什么是数学，怎么样学好数学？作为家长，又怎么样帮助孩子学数学呢？很简单，就是陪孩子一起学习．

◎ 永远不要直接教孩子做题

前面强调了数学的重要性，于是家长就发愁了：“哎呀，数学很重要，我也知道啊，但是我自己的初中数学都忘光了，辅导不了孩子了呀，是不是应该给孩子报个辅导班，或者请个家教呀？”我告诉你，没必要，原因有两个：第一，我说的数学不仅仅是课本上的数学；第二，数学分数的好坏也不是衡量数学能力的唯一标准．你强迫孩子学习也好，请家教教孩子也好，只能教给孩子知识，教不了孩子能力；只能提高孩子的分数，提高不了孩子的素质！作为家长，我们要做的、我们能做的，其实也只有两点：第一，让孩子主动学习；第二，陪孩子一起学习．

什么？主动学习？想必很多家长听到这里都要气乐了：我的孩子要是能主动学习，我还用操这份闲心吗？我们家孩子即使挨打都不愿学习，怎么可能主动学习呢？但是，我决不是在开玩笑，我必须再次强调：主动学习，既是孩子学会数学的充分条件，又是孩子学会数学的必要条件．说白了，除了主动学习之外，不需要任何其他条件，孩子就能学好数学．其中的道理相信大家都能理解，因为我们从来没见过一个爱学习的孩子学习成绩不好的．那么，我们唯一要面对的问题就是如何引导孩子主动学习．

首先，我要给您一个建议：在孩子步入初中阶段的时候，找个时间，和孩子心平气和地长谈一次，把你所知道的学习的重要性，和孩子一条一条掰开来揉碎了讲述一遍．这次长谈的具体内容并不是最重要的，最重要的是我们对孩子的态度．无论出现什么样的情况，都不能向孩子发脾气，因为在我们大喊大叫的时候，孩子只会感觉到我们的态度粗暴，只会感受到我们对他（她）的厌恶，丝毫感受不到我们对他的关心和爱护．我们要通过这样的长谈，让孩子真切地感受到我们对他（她）的尊重．注意！我提到了“尊重”两个字，不但孩子要尊重我们，我们也要尊重孩子，尊重孩子的自尊，尊重孩子的爱好，尊重孩子的成长规律．在相互尊重的前提下，我们和孩子的谈话在开放、平和中开始，在语重心长中结束．孩子进入初中阶段以后，就要进入青春叛逆

期，很快就会长大成人，我们要给孩子一个平等的长谈的机会．这样的长谈，不仅对于孩子的学习是重要的，而且对于孩子处理将来在生活中出现的问题也是必要的．现在的社会比较复杂，无论孩子遇到了学校霸凌事件，还是出现了早恋的问题，都需要通过耐心的沟通交流来解决．俗话说，人心都是肉长的．我相信，有了这样的对话，孩子多多少少都会加深一点对学习重要性的认识，即使不能马上扭转他的学习态度，也会有一个良好的开端．

当然，这样的谈话次数不可能很多，有可能只是一年一次，甚至两三年一次．因此，我相信家长们都能够抽出一两个小时的时间，和孩子好好谈谈学习．但是问题又来了，在我们和孩子谈完话以后，孩子都会激动兴奋一两天，然后慢慢就放松了，俗称三分钟热度．在这种情况下，好多家长就开始不耐烦了，开始大声呵斥孩子："你让我感到失望，前两天刚和你谈过话，让你好好学习，你看看你，才坚持了几天，像你这样没有耐心，没有毅力，一辈子也没出息，我以后再也不管你了，你爱学不学！"这样一呵斥，孩子也会对自己感到失望，很快就会自暴自弃："看来我真不是学习的料儿，那就算了吧．"于是，我们前面的沟通交流工作就完全失效了．因此，接下来，我要说说第二点，陪孩子一起学习．

为什么要陪孩子一起学习？陪孩子一起学习的目的是什么？在我看来，陪孩子一起学习，首先要保持孩子主动学习的劲头，孩子没耐性，做事情只有三分钟热乎劲这是很正常的，因为孩子还小．但是如果家长都没有耐性，那就有问题了．陪孩子一起学习，就是培养孩子的耐心！在电影《羞羞的铁拳》里面，有一个熬鹰的情景，男女主角和老鹰比赛熬夜，谁先眨眼谁就算输了．我们就是要和孩子比耐心，看谁熬得过谁．不过，这可不是让孩子天天学习、天天熬夜．对于数学而言，家长只需要每天陪孩子学习15分钟就足够了．为什么呢？因为每天老师在课堂上讲的核心内容都不会超过10分钟．

但是，我们要知道，每天陪孩子15分钟这个习惯，是必须要坚持的．有的家长会强调自己工作忙没时间，但即便是家里没时间，你送孩子上学的路上总有时间吧？只要去挤，我不相信父母两个人在一天里都挤不出15分钟来，就看你想不想去挤了．而且我还要说明的是，不管你

的工作有多忙，不管你一天能挣几百万，这15分钟花得都是最值得的，因为孩子的将来有希望，会比自己事业的成功带给你更多的成就感．这时候可能又有家长说了，我陪孩子没用啊，我自己的初中数学知识都忘光了，怎么陪他呢？这就是我接下来要讲的重点：永远不要直接教孩子做题．因为能力是教不会的，你教给孩子的，只是知识而已．因此我们每教会孩子一道题，孩子的动手能力就差一点；每教会孩子一道题，孩子的自信心就会少一点．很多家长发现，越是教孩子学习，孩子越笨；越是教孩子，孩子越学不会．如果你把自己当作孩子的拐棍，那孩子还能学会自己走路吗？

陪孩子学习，究竟应该怎么陪呢？我们只需要做到三点就够了：第一，和孩子一起学习．比如，和孩子一起读数学书，在送孩子上学的路上和他一起听数学课程，学完以后和孩子讨论一下．第二，让孩子教你学习，让孩子给你讲讲课堂上的内容或者讲讲书里的内容．孩子讲得对不对不重要，你能不能听得懂也不重要，只要孩子给你讲，他就是在学习、在思考了，他的能力就已经在提升了．第三，让孩子出题，你做！记得在前面我说过，数学分数高，并不能证明孩子数学学得好，那么，怎样算学得好？我告诉你，会出题就算孩子学得好！孩子学完了二元一次方程，你让孩子给你出几道实际生活中遇到的二元一次方程的题目．如果他能很顺利地给出题目来，那就算学好了．为一个现有的题目找到答案，不算本事；从没有问题的地方发现问题，才算真本事．只有真正把课本知识吃透了，练就自己的真本事，孩子才会拥有学以致用的能力．

◎ 知难而喜：培养孩子独立解决问题的能力

目前，由于受到应试教育的影响，孩子的学习压力很大，学习任务非常艰巨．很多初中的孩子平时作业都做不完，常常熬到深夜才能休息．很多孩子连课本上的知识都学不会，常常是一道题卡住了，两三个小时都做不出来．那么在这样的条件下，我们又如何培养孩子独立解决问题的能力呢？这就取决于我们如何看待这个问题了．我要告诉你的是：任何一个初中生，当他遇到一个难题的时候，都需要具备连续两三天来解决它的耐心．为什么会这样呢？

我们首先要明白一点，绝大多数人，一生做好一件事情，就已经非常了不起了，这个道理我们不用多讲．那么，我们的孩子从学校毕业以后，他凭什么能一生坚持做好一件事呢？很简单，当他读博士的时候，学校会给他三四年的时间，让他坚持做一个课题．而他凭什么能在读博士的时候，坚持几年做一个课题呢？因为他在读硕士的时候，需要坚持一年做一个课题！而硕士阶段他能坚持一年，又是因为他在读大学本科的时候，毕业设计是花了三四个月的工夫才做出来的．

发现了没有？要想有30年做成一件大事的本事，就要有连续3年聚焦一个课题的本事，就要能够经受一年只做一件事和三四个月只做一件事的考验．只要按照这个规律反推一下就会知道：任何一个高中生，都应该具备连续一周突击一道数学题的耐心；而任何一个初中生，则需要具备连续两三天面对一道难题的勇气．如果没有这样的耐心、没有这样的勇气，他凭什么考上大学，凭什么成为博士，又凭什么做出一番成就呢？

在这样大是大非的问题上，孩子没有耐心是可以理解的，但可惜的是，我们作为家长，也没有耐心，看见孩子有一道题不会了，恨不得马上教会他．然而，这样做只会毁了孩子．我们知道，学校的老师拼命给孩子多留作业，是因为老师之间有着激烈的竞争关系．一般来说，谁给孩子留的作业多，谁负责的课程成绩就会好一点，老师得到的奖励也就会高一点．基于同样的原因，那些课外培训机构的老师们也会以填鸭式

的教学方法，硬塞给孩子一些速成的解题思路，因为这样做有助于孩子分数的快速提升，自己的培训机构才能多赚钱．这样做不是为了孩子的成长，而是为了自己的利益！正是因为如此，各地教育部门才反复下令给孩子减负．而我们作为家长，应该擦亮自己的眼睛，明白孩子真正需要的是什么！当孩子面对一道数学难题的时候，我们首先要做的是鼓励孩子，让他们拥有独立面对问题的勇气，让他们拥有长期面对难题的耐心，不但要做到知难而进，而且要做到知难而喜！

是的，知难而喜！面对一道很难的数学问题的时候，我们的确应该感到高兴．无论这道题我们能不能做出来，是不是做对了，都应该感到高兴，这里面有三个方面的原因：第一，一道难题可以培养我们的耐心和勇气．第二，一道难题可以让我们把相关的知识都调集到头脑中，反复地梳理这些知识点，最终，即便这道题目没做出来，我们对已有知识的熟练程度也会大大地增强．第三，一旦解出这道题，与之类似的大多数难题往往都迎刃而解．但与此相反的是，如果这道题是别人教会你解的，那么，你可能只会解这一道题，而且记不住，过几天就会忘记．这也是很多家长都忘了初中数学知识的根本原因．不过，我说要连续3天面对一个问题，只是极特殊的情况，根据我的常识，绝大多数问题，孩子只要坚持两个小时以上，都能做出来．

知难而喜——我们希望孩子在面对一切难题的时候，都能有这样理性乐观的态度．当然，如果您的孩子基础比较差，您可以先选择一些适合他做的题目来锻炼他的耐心，不要一开始就让他接触太难的问题，这样孩子的信心可以慢慢被培养起来，不至于受到太大的挫折．其实一切数学问题是有一套通用解决办法的，那就是：不断试错，不断修正，笔耕不辍，其解自得．如果换成大白话就是，只要不断地做下去，肯定能做出来！这好像只是一句废话啊，但没办法，这就是世界上所有难题的通用解决办法，无论是数学题还是其他难题，都是如此．历史上，我们就是采用这种办法来解决难题的．

比如圆周率π．没有人知道π的精确值是多少，也没有人知道π的计算公式怎么列，那怎么办？没办法！我们求不出圆的周长，我们就求三角形的周长．三角形的周长和圆的周长不一样，这不要紧，我们发现错了，慢慢改进就行了，这就叫试错．我们把三角形的周长改成六边形的

周长，虽然六边形也不对，但是和三角形相比，它更接近圆了，这就叫不断修正．继续修正下去，我们还可以求解十二边形的周长、二十四边形的周长．不断求解下去，我们就可以不断接近π的真实值．这个方法就是著名的割圆术，祖冲之就是用这种办法，精确到了圆周率小数点后面7位数字．连数学家都用这个办法，可见，这的确是一种通用的解题思路．

现在我们来总结一下，在本章之中，我们一起讨论了三个问题：第一，希望作为家长的您重视孩子数学的学习；第二，希望您陪伴孩子一起学习；第三，希望您培养孩子独立解决问题的能力，让孩子对解题有足够的耐心，能做到知难而喜．

二　奇妙的几何学

◎ 没有数字的数学

我清楚地记得，刚上初中的时候，数学老师一上讲台就和我们说："同学们，从今天开始，我要求大家把自己直尺上的刻度全都磨掉，把你们的三角板和量角器也都收起来，今后我们研究图形只能用一把没有刻度的直尺和圆规．"听老师这么一说，我就傻了，直尺上有刻度不让使用，我还怎么知道一个图形的长度，又怎么计算面积呢？哎，这就是我们要研究的新学问，它是一种没有数字的数学，名叫几何．[(1)] 什么叫几何呢？几何就是多少的意思．多少呀？我不知道，你也不需要知道，我们要在不知道具体数值的情况下把图形的学问研究明白．

可是如果我们连个准数都没有，这不是在瞎研究吗！是吗，你确定没有数字就研究不明白吗？你有没有听说过郑人买履的故事呢？

> 春秋时期，有一个郑国人，到集市上去给自己买鞋，卖鞋的老板问他："你买多大号的鞋呀？"他从来没买过鞋，也不知道自己的鞋号，于是就回家去拿了一把尺子过来，用这个尺子，先量了自己的脚，又量了卖的鞋，然后才掏钱买．这个卖鞋的老板被逗乐了："你给自己买鞋，还拿什么尺子呀？简直是有毛病！"

事实证明，没有准数的时候，也是能干活儿的．

想明白了这个道理，我们回到课堂上来：当老师没收了我们的刻度尺以后，就在黑板左边画了一条线，然后就把我叫到了讲台上，他说："你能不能在黑板的右边，用这个直尺和圆规画一条长度一模一样的线段呢？"我当时就傻了，我想，我得量一下这条线有多长呀，不知道多长，我怎么能画出一样长的呢？不过我还是挺机灵的，我把这个尺子抓在手里以后，先把尺子的一端和线的左端对齐了，然后再顺着线段的方向把直尺摆好，最后沿着线段的末端，用粉笔在尺子上做了个记号．这样一来，我就在直尺上标记出一个刻度，于是这条线段的长度就和我画

的刻度一样了，这样我就把那条线画出来了．

可是老师又说了，尺子上不能有刻度，自己画的刻度也不行！于是我没办法了，只能叉开自己的手指，用这个大拇指和食指当尺子，保持住这个姿势不动，挪到另一边去，按手指叉开的长度画了一条线段．但是老师又说了："不许用手！因为你的手指头是活动的，即使你感觉不到自己的运动，运动变化也是存在的，所以这种方式也是不允许的．"

听到这里，我突然发现，为什么要用自己的手指呢，这个圆规的两条腿，不就是天然的两根手指吗？而且把圆规叉开到指定的宽度，它就静止不动了．于是我把圆规的两条腿叉开，挪到线段上比一比，确定圆规叉开的长度和线段长度一样了，再按照这个长度画线，结果就出来了．做完以后，我终于看到了老师满意的笑容．

老师是满意了，可我还不满意，于是就反问他："老师，我们明明可以用尺子直接量一下，你为什么非得让我用圆规呀？"老师说："你用尺子量了长度，再用这个长度去画线，就好比那个买鞋的郑国人，用尺子量了脚再量鞋，你的脚就在你身上，为什么不能直接用脚量鞋呢？同样，我的线段就在这里，为什么非要把它变成数字呢？"直到这时，我才恍然大悟，原来我们一直引以为豪地在几何中使用数字，却闹了郑人买履的"笑话"．

研究几何图形的时候就是这样，虽然我们不一定知道每个图形的具体长度、宽度和角度，但是我们却可以清晰地知道这些数值之间的相互关系．几何学要求我们通过直尺和圆规去认识世界，通过这两种工具，我们可以更接近事物的本原，更了解事物的真相．几何学的本原就是丈量土地的学问．它发源于5000年前的古埃及，那时候人类已经掌握了耕种技术，开启了农业文明，但尼罗河水经常泛滥成灾，一旦冲毁土地，人们就必须重新丈量土地，于是在这个过程当中，古埃及人就积累了大量的几何学知识．

公元前7世纪，古希腊数学家泰勒斯，把古埃及的几何知识带回了古希腊，同时，他开始思考这些几何知识之间的关系，并对部分的定理给出了严格的证明，几何知识在古希腊开始孕育发展．之后毕达哥拉斯、柏拉图都对几何学做了突出的贡献，到了公元前300年左右，欧几

里得把当时所有的几何学知识融会贯通，收集整理出一部近代数学的奠基之作——《几何原本》．

在《几何原本》中，欧几里得首先明确了点、线、面、角等一系列基本图形的定义，然后从几条人所共知的、不证自明的公理出发，通过严格的逻辑推理，将零散的、不连贯的几何知识组织起来，告诉我们平面和立体图形的性质和判定方法，以及通过尺规进行平面作图的方法．通过5条公理、5条公设、119个定义、465个命题，构建起了一座宏伟的数学大厦．《几何原本》问世以后，通过各种语言出版超过1000个版本．目前，除了《圣经》之外，世界上还没有任何一种著作拥有如此多的读者．1607年，徐光启和意大利传教士利玛窦把这部著作的前6卷译成了中文，并且定名为《几何原本》．

◎ 一根细线量土地

在实际生活中，无论是古人丈量土地，还是现代人进行工程施工，他们所用的工具其实都只是一根细线．他们把线的两头一抻，拉直了就可以当直尺用，如果按住一头不动，另一头抻紧了围着那个固定点转一圈，就可以画出来一个圆了．也就是说，我们在白纸上的尺规作图，对古人而言，不过是一根再平凡不过的细线而已．同时我们还需要知道，细线出现得比直尺和圆规要早得多，不是古人用细线来模拟直尺和圆规，而是我们在纸上通过直尺和圆规替代了古人所用的细线．为什么要这么做呢？因为我们用细线在纸上画图不方便．明白了这个道理，我想你就应该清楚为什么老师不让我用带刻度的尺子．那是因为这细线上本来就没有刻度．

那么，用细线来平分土地有什么好处呢？它的好处可就多了：第一，一根细线是随处可见的，它的制造成本要比一根带刻度的皮尺便宜得多；第二，用一根细线可以在根本不知道土地面积具体是多少的情况下把它给平分了．这两点就意味着生活在古埃及的人，可以在没有统一度量衡的条件下，开启自己的农业文明．什么叫度量衡呢？度量衡就是长度、体积和重量的统一标准．要想有统一的度量衡，就必须要人为地明确规定，多长叫一尺，多重叫一斤，多少粮食叫一升或一斗．在中国，统一度量衡这件事情是直到秦代才实现的，这也是秦始皇的伟大功绩之一．可是你要知道，如果我们到秦始皇那个年代才学会种地，那可就麻烦了，我们必须在没有统一标准的条件下，就学会平分东西．我们必须懂得，在没有数字的条件下，如何利用图形去认识世界、改造世界！

要想彻底地掌握一门学问，最有效的办法就是研究这门学问的历史，而研究人类历史，最简单的办法就是研究牙牙学语的婴儿的行为习惯．因为婴儿什么都不懂，通过婴儿的行为习惯，我们可以了解人类早期的一些行为．

刚学会说话的孩子一般都有一个习惯，就是喜欢说叠字，比如吃饭，会说“饭饭”，上厕所会说“便便”，因为孩子发音还不全，这么说话

我们都能理解，也没人笑话这些孩子．可是如果成年人也这么说话，那就有问题了．无论是大人还是孩子，有两个词，我们却一直都保持了这个习惯，那就是“数数”和“画画”．“数数”第一个字是动词，我们要数，第二个字是名词，我们要数的对象是数字．“画画”也是这样，第一个“画”表示动作，第二个“画”表示对象和结果．为什么要研究这两个词汇呢？因为，这至少说明了三个问题：

第一，数数和画画出现的时间非常非常早．我们之所以用叠字来表示这两件事，说明在那个时候，我们还没有发明大量的词语，所以古人只能像小孩子一样，用叠字来表示它，这甚至比发明文字还要早．你发现没有，我们管写字不叫写写，也不叫字字，我们管说话，不叫说说，也不叫话话．

第二，数数和画画出现的频率非常非常高．因为我们经常会用到，所以即使后来发明了新的字词，我们也不会把它替换掉．比如，我们已经发明“计”“算”这两个字了，数数这个动作完全可以说成“计数”或者“算数”，但是我们平常就是不那么说．我们发明了“绘”“图”这两个字，但是我们平时也不说“绘画”和“画图”．因为我们对这两个词的使用频率很高，怎样最方便我们就怎样叫．这时候，懂外语的朋友可能会说了，人家拉丁文、希伯来文可不一定是那么说的呀！这倒没错，但你要知道，虽然我们中国的文字很多，可是要论表达的简练和深刻，还没有哪种文字能和中文相比．

第三，通过上面的分析说明，数数和画画非常重要，它是人类文明的基础．关于人类为什么要数数我们已经说过了，这里不再重复，那么人类又为什么要画画呢？

因为画画代表了人类的抽象能力．大家都知道，我们生活的这个世界本来是立体的，但是我们画出来的图画却是平面的，实际人物和物体都是丰富多彩的，而在画里我们却通过线条把它们变成了寥寥几笔．别看只有寥寥几笔，这简单的几笔却勾画出了人或物的最关键的特征，所以才能让观看的人一目了然．因此，想要把一幅画画好，必须有高度的抽象概括能力，必须有抓住事物本质特征的能力．

不管世界有多大，不管年代多么久远，我们只要大笔一挥，这个世

界就会呈现在众人的面前．图画让我们渺小的身躯，可以通达大千世界；图画让我们短暂的生命，能够感受古往今来．随着历史的发展，部分图画经过进一步的抽象和简化就变成了文字、变成了数字、变成了图形，人类文明也就蓬勃发展起来了．

◎ 学习数学就是构建逻辑思维体系

在前面的内容中，我们提到：埃及的尼罗河经常发水，需要丈量土地，因此而产生了几何学，那么为什么古代的中国和印度就没有发展出几何学呢？难道黄河和印度不会发水吗？实际上，只要是大江大河，肯定都会不定期地发洪水．我们中华文明从尧舜开始，就治理黄河，折腾了几千年．可我们也得知道，虽然几何学能够解决分土地的问题，但却并不是说分土地就只能用几何．如果你翻开我国古代的《九章算术》，就会发现这本书的第一章就是专门研究平分土地的，各种形状的土地的面积的计算方法都有记载，只不过它用的是算术方法而已．那么在平分土地这个问题上，《九章算术》和《几何原本》有什么本质区别呢？

一提到数学，很多人都会认为，数学就是用来算账的工具，数学书就好比词典，遇到一个问题的时候，只要到数学书上去查一个公式，然后照葫芦画瓢就把这个问题解决了．其实，在我国古代，数学典籍就像字典一样．《九章算术》，就把所有数学知识都按照数学的实际用途分门别类地编好了，分地就看第一章，卖粮食看第二章，收税就看第六章．但是，如果打开《几何原本》，立刻就傻眼了，这本书哪是教我分土地的呀？它的目录里面只写着命题1、命题2、命题3，它的内容就是在这些定理之间绕来绕去地相互证明，根本看不出有任何实际的用途．

那么欧几里得这是在做什么呢？他要做的是，不仅要让我们知其然，还要让我们知其所以然．古希腊人有着很强的思辨能力，从《几何原本》中可以看到：欧几里得从几条基本假设开始，经过了严格的逻辑推理证明，建立起了一个由几百条定理、推论组成的知识体系．从此，那些只靠经验和直觉判断的旧数学，转变为清晰明确、有条不紊、逻辑严谨的新数学．那么，什么叫逻辑呢？我们又怎样进行推理呢？一个数学定理，又为什么需要证明呢？接下来，我们就一起来讨论这些问题．

所谓逻辑，就是我们人类认识世界的思维方式，逻辑推理主要有三种方法：归纳、演绎和类比．所谓归纳就是通过特殊事物得到一般规律．比如，我们看了很多天鹅都是白色的，于是就归纳出来，天鹅的颜色都是白的．所谓演绎就是根据一般规律认知特殊的事物．比如，猫是

会捉老鼠的，因为汤姆是一只猫，所以它也会捉老鼠．所谓类比就是拿相似的事物打比方．中国的古人最擅长的就是类比证明．像我们平时所说的天人合一的道理就是类比：天行健，君子就应该自强；天无言，君子就应该少说话多做事． [2] 应该说，目前人类的所有知识，都是通过归纳、演绎和类比的方法得到的．但是，我们同样应该知道的是，无论是哪一种思维方式，它本身都有一定的局限性，其中最不靠谱的就是类比的方法．将两个原本就不相同的事物，强行捆绑在一起来解释是不具备说服力的．那么归纳法又有什么问题呢？它的问题在于以偏概全，我们看见几千只天鹅是白色的就能证明所有的天鹅都是白的吗？万一有你没见过的黑天鹅呢？最后我们再看演绎法，演绎推理看似严谨，但是它的问题在于，必须要保证前提是对的．如果前提错了，后边的推论也就全都错了．

那么，既然这三种方法都有问题，我们还能否认识世界呢？认真分析一下，我们就会发现，在这三种方法之中只有演绎法是相对靠谱的，只要想尽一切办法，保障它的前提正确，那么后面的结论肯定就是正确的．因此，我们需要找出那些比较容易理解的、大家都普遍接受的道理，从这些基本的道理出发，按照一套标准的逻辑体系，再去推演出其他不太常见的、不太容易被理解的道理．那些简单易懂的、大家都普遍认可的道理被称作公理，它们本身是无须证明的；而那些通过逻辑推理被公理证明了的道理，我们把它们叫作定理，一个定理一旦被证明了，就可以继续以它为基础再去证明其他道理，于是一个由公理和定理相互交织、相互佐证的知识体系就这样被一砖一瓦地搭建起来了．无论是欧几里得的《几何原本》，还是牛顿的《自然哲学的数学原理》，都是采用这种结构．

数学知识的学习有四层境界，其中第一层是对知识进行分门别类，第二层是在所有的知识之间建立关联．所谓的公理知识体系，说的就是这个意思．虽然《九章算术》和《几何原本》中分别记载了几百个问题，但是《九章算术》里边的问题只有分类，没有相互关联，而《几何原本》中的知识却是浑然一体的．书中400多个定理，全部源于5个公理和5个公设推导的结果．除此之外，书中还涉及100多个定义．

什么叫定义呢？所谓定义就是声明一下点、线、面、圆、角、平

行、垂直这些概念的具体含义．比如，我们对圆的定义是：到圆心的距离等于半径的所有点的集合．了解了圆的定义，我们就可以在现实世界中去寻找符合这个定义的那些形状，比如太阳、月亮、盘子、车轮．而后就可以按照圆的性质，去计算这些物体的周长和面积．但是我们也需要知道，从严格意义上讲，几何学上定义的点、直线、圆这些图形都是高度抽象、高度理想的，在现实生活中，既找不到绝对完美的直线，也找不到绝对完美的圆．但是，如果忽略一些细节，我们还是可以近似地将一些图形当作标准的图形来处理的．

同时，定义本身也说明了图形的一些性质，比如根据圆的定义我们可以知道，同一个圆所有半径的长度都是相等的．这个判断就既不属于公理也不属于定理，它只是定义规定的一个内部特性，这就像女人的性别都是女的一样，同样是无须证明的．定义、定理、公理、公设所有这些内容统称为命题．那什么叫命题呢？命题就是判断一件事情的句子．定义这种命题教给我们判断一个图形是什么形状，帮助我们判断在一定条件下两个图形之间的相互关系．所有这些命题通过严密的逻辑推理组织在一起，就构成了几何学的整体知识架构．

(1) 编者注：如无特别说明，本书中的几何指欧氏几何．“它是一种没有数字的数学”这句话严格的说法是，几何是一种不依赖数字的数学．

(2) 编者注：前半句源自“天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物”，后半句源自“天无言而四时生，地无语而万物生”．

三　世界就是点、线、面

◎ 点、线、面到底是什么

子路问孔子，如果卫国的国王让您去执政，您要做的第一件事是什么呢？孔子说，必也正名乎！他的意思就是，他一定要先给很多词语下个准确的定义，做个详细的解释．子路一听就笑了，他在笑孔子的迂腐，他说："放着那么多正经事您不做，为什么要先下定义呢？"孔子郑重地说："名不正则言不顺，言不顺则事不成．"这就是说，如果一件事情没有明确的定义，一个官职没有明确的职责，我就没有办法通过语言下达明确的指令，事情自然就没办法做成了．做事是这样，做学问更是这样．很多人都感觉给词语下个定义应该是很简单的事情，在这个世界上，对就是对，错就是错，好就是好，坏就是坏，好像把一个东西解释清楚非常容易．你要是这么想，就大错特错了．

在古希腊有个与孔子同时代的哲学家叫苏格拉底，苏格拉底有一句名言：我唯一知道的是自己一无所知．因为在苏格拉底看来，这个世界上没有任何一个词是可以真正解释清楚的，那些自我感觉什么都懂的人，实际上都只是逻辑不清的自大狂而已．有一次，苏格拉底和一个年轻人讨论什么叫道德．这个年轻人说："诚实就是道德．"于是苏格拉底反问他："那如果我在战场上欺骗了敌人，这算是不道德的吗？"年轻人答道："欺骗敌人是道德，欺骗自己人不是．"苏格拉底问道："那如果我通过谎话鼓舞士气，赢得了胜利，那算道德吗？"年轻人又答："战争是特殊的场合，行骗是不得已的行为，但是我们在日常生活中不能行骗．"苏格拉底接着问："如果我的父亲病得很重，可是我和他说，你的病不是很严重，好好休息，很快就好了，这算不道德吗？"年轻人说："这当然算道德了．"这时候苏格拉底就说："既然骗人也算道德，不骗人也算道德，那么到底什么是道德呢？"结果这个年轻人只好承认，过去我知道什么是道德，但现在我糊涂了．其实，不仅是"道德"这个词，只要你具有苏格拉底一样的探究精神，具有打破砂锅问到底的精神，不断追问下去，你就会发现，绝大多数词语的具体含义都是模糊不清的．

在我国百家争鸣的春秋时期，有一个哲学流派叫作名家．名家的创

始人叫惠施，在他看来，正是很多词语的含义模糊不清，才导致了人与人之间的矛盾冲突，大家表面上说着相同的话，但却各自具有不同的理解，这种名不符实的结果就导致了天下大乱．而要想解决这个问题，就只能彻底弄清名实之间的辩证关系，弄清每一种事物的概念和定义．可见，弄清定义是多么重要！因此，《几何原本》一开篇就对点、线、面这种基本的元素做出了定义和说明．

那么，什么是点呢？欧几里得告诉我们：点就是不可分割的最小元素．什么是直线呢？无数个点沿着相反的两个方向不断延伸，无限累积起来就是直线．那什么又是面呢？由直线自身均匀分布的只有长度、宽度而没有厚度的形状就是面．看样子，好像面是由线组成的，线又是由点组成的，那么，这是不是意味着所有的图形都是由点组成的呢？没错，要不然欧几里得怎么说点是不可分割的最小元素呢！但是，为什么如此复杂的大千世界，却是由一些微不足道的小点组成的呢？要了解这一点，我们就必须到现场看一看，画家是怎么画画的．

我们发现，只要一个画家有了高超的绘画技巧，无论他眼前的世界多么复杂，他都可以通过一支笔、一张纸把它呈现出来．我们知道，当一支笔落在纸面上的时候，就能落下一个点；而当这支笔在纸面上移动，它就可以画出一条线；当多条线在纸面上相互衔接，就可以组成一个面；而这些面之间再相互组合起来，我们面前的立体世界就一点一点地呈现出来了．这个过程说明什么呢？它恰好证明了，我们的世界本来就是由最基本的点组成的．如果不是这个原因，画家凭什么能够通过一支笔和一张纸就把眼前的世界描绘出来了呢？

其实，我们可以感受到，点、线、面、体这些元素并非完全独立．虽然我们手中只有一支笔，但是仍然可以绘制出一切，这又是为什么呢？这是因为，线是由点的运动产生的，而面是由线的组合产生的，同样把面累积起来就得到了体．如果不是这样的话，那我们就不能只用一支笔来绘画了．我们必须用专用的描点笔画点，勾线笔画线，再用刷子或者印章来绘制平面，而绘制立体就只能用刻刀了．事实证明没有这个必要，只需要一支普通的笔就可以做到这一切．

而且我们还知道，不仅一张画的基本元素是点，手机和电脑的屏幕

也都是由许许多多发光点组成的，这些点发出不同颜色不同亮度的光，它们相互组合起来，就形成了丰富多彩的图像和视频．不仅如此，学了物理和化学知识后我们还了解到，世界上所有的物质，不管是一颗恒星还是一粒灰尘，不管是空气还是石头，本来都是由一些极小的点组成的，这些微小的点我们称为原子，原子理论是古希腊的德谟克利特提出的，但是这一观点却是近代才通过科学手段加以证实的．欧几里得信奉德谟克利特的原子论，所以他才能够从复杂的世界中抽象出点的概念，这就是几何学中点的概念的源头．

◎ 点、线、面里的生活哲学

直线是点沿着两个相反的方向无限延长的结果，因此直线本身是没有长度的，或者说直线的长度是无限的．但是如果我们在直线上卡住两点，那么，由于这两点的位置固定了，所以它们之间的距离也就固定了下来，于是我们就把卡在两点之间的这段线叫作线段，而把线段的首、尾两个点，叫作线段的端点．而端点之外的两部分呢？其中每部分仍然是沿着原来直线的方向无限延长的，这种只有一个端点的线，很像光线发射出去的轨迹，所以被叫作射线．可见，点既是组成线的基本元素，又是线的端点和边界．同时，我们还知道，当两条直线相交的时候，会形成一个交点，而且只有这一个交点．那么，现在问题来了，请问几何图形是不是只能描绘一个静态的世界呢？如果我们想要描绘动态的世界，描绘人类的活动，几何知识是不是就帮不上忙了呢？

仔细想想，的确是这个道理：我们要教孩子孝敬父母，就得用语言表达；我们要教别人炒菜做饭，就得拍个视频演示．点、线、面还真干不了这样的活儿．嘿嘿，如果你要这么想，那就大错特错了．点、线、面能做的最重要的事还真不是通过画图，而是通过描绘运动变化，指导人们改变世界！为什么呢？因为几何图形中，隐含世界运动的法则，隐含着做人做事的道理．有人可能会问，做人做事和几何图形有什么关系呢？接下来我们就一起来分析一下．

请问，我们在做事的时候是不是应该按照道理办呢？那道理中的“道”字又是什么含义呢？“道”难道不是一条线吗？同样，我们做人做事，是不是也应该符合规矩？那么这规矩又是什么呢？规矩就是圆规和直尺，也是绘制几何图形的常用工具．所以我们才说，没有规矩不成方圆．既然做人做事的道理就是一条线，规矩就是几何图形，那么具体的一件事又是什么呢？世界上发生的任何一件事，是不是只能发生在一个时间、一个地点呢？照这样看来，它就只能是线上的一个点了！

很好，我们继续往下分析：请问一条线上有几个点？根据几何知识我们知道，一条线上会有无数多个点．没错，但是既然一条线上有很多个点，那么如果我们只遵循一个道理的话，能决定一件事具体该怎么做

吗？别急，让我们把思路重新整理一下：一个道理就是一条线，一件事就是一个点，一条线上又有无数个点，那就说明按照一个道理，一件事不可能只有一种做法！以孝敬父母这件事为例：你给父母买点东西叫孝敬父母，我帮父母干点活叫孝敬父母，他陪父母多聊聊天也叫孝敬父母．同样，如果把这个道理反过来，能不能说，只要你给父母买东西，就证明你孝顺父母呢？或者只要你不陪父母聊天就证明你不孝顺呢？当然不能了！为什么？因为孝顺父母的方式有很多，你怎么能只看见人家不聊天就说人家不孝顺呢？

那么，既然道理决定不了一件事怎么做，我们是不是就可以不按道理做事了呢？也不对！虽然一条线上有无数个点，但是这并不表示我们可以为所欲为，因为还有好多的点不在这条线上．同样，虽然一个道理不能明确告诉我们该做什么，但它却可以告诉我们什么是不能做的．比如，一个孝敬父母的人是不能虐待老人的，因此某个人只要虐待老人，就足以证明他是不孝顺的人．因为虐待父母这件事不在孝道允许的范围之内，或者说，这个点就不在孝顺的这条线上．

那么，当我们真的要决定做一件事的时候，又该怎么判断呢？根据几何知识“两条直线相交只有一个交点”的原理，我们可以知道：虽然一个道理决定不了某件事具体怎么做，但是如果有多个道理存在，我们就可以做出决定了．比如，冬天到了，你要孝敬父母，可以给父母买件羽绒服，这就是由两个道理、两个条件共同决定的．这就是说，虽然一个道理不能决定一件事怎么做，但是我们在遇到实际问题的时候，总会遇到两个道理、三个道理并存的情况，因此我们就可以做出决定了．

同样，两点确定一条直线的道理告诉我们：当我们判断一个人的时候，不要过早地下结论，我们既不能因为一个人做错了一件事就彻底否定他，也不能因为一个人做了一件好事就全面肯定他，只有经过多次观察，才能全面了解一个人的品性．但是社会上的很多人，就是不懂得这个道理，他们会死抱着一个道理不放，比如，买了日本品牌的车就是不爱国；你不送我礼物就是对我不好．他们看不见这个世界上还有其他的道理，不懂得要多个道理才能决定一件事具体该怎么做．我们把这种行为叫作一竿子打翻一船人！这一根竿子不就是一根线吗？你手里拿着一根线一划拉，不就形成了一个面吗？所以我们才说这种人说话办事不动

脑子，你这一句话说出来，打击面太大了．瞧见没有，这里的打击面，是不是就是那一竿子瞎划拉出来的呢？

以上，就是点、线、面教给我们的做人、做事的道理．不过必须要说明的是，我们今天的这些结论，同样只是借助类比的方法分析了人类的社会活动，应该说这并不是一套严格的证明过程，所以不能生搬硬套地使用．难道这几何知识只能通过类比的方法来指导人类社会吗？当然不是，现代的经济学就可以把人类活动变成一些经济指标，再通过数学解析，把它变成几何图形．关于这部分内容要到解析几何的部分才能讲述，这里只做一个大概的类比．在实际生活中，还必须结合实际情况，具体问题具体分析．

◎ 几何学的5条公理

在我整理的所有初中数学的课程当中，几何学的知识架构是我认为最难讲的．为什么呢？因为几何学的知识是浑然一体的，要对这门学问做出绝对科学严谨而又完美的分类，几乎是不可能的．这并不是说几何知识不能分类，而是它的分类方法实在是太多了，具体的分类方式至少有十几种，而且还没有哪一种方案是绝对完美的．

以一个最简单的问题为例：把平行四边形、长方形、正方形、菱形这四个几何图形做个分类．可以按直角分类，把长方形和正方形分一组；还可以按照等边分类，把正方形和菱形分一组．尽管我们可以按照现行教科书的分类方法，把长方形和菱形都归属到平行四边形中，但这样一来我们就发现，无论把正方形归属到长方形那边还是归属到菱形这边都不是太合适．别急，我的分类方法还没完呢？我可以认为一切图形都是由正方形变化得到的：长方形是正方形水平拉长以后的结果；菱形是正方形倾斜扭转以后的结果；平行四边形呢，又是长方形倾斜后的结果．虽然分类方法如此众多，但是却没有任何一种分类方法是完美无缺的．这才仅仅4个图形就让人如此晕头转向，《几何原本》中有400多个定理呢！谁能告诉我，应该怎么分类才最合适？没办法，因为几何学原本就是一个整体，而分类就意味着要把很多知识割裂开来看待．

那么，欧几里得的《几何原本》是按照什么方式叙述的呢？它基本上是按照这些命题之间的依赖关系叙述的，先讲简单的命题，再讲复杂的命题，同时兼顾一下不同的形状．中学教科书中则完全是按照几何图形分类的：先讲平行线，而后是三角形、四边形、圆形．这样的分类方法是严谨的、循序渐进的，这种方式不但符合做学问的需要，也适应教学和考试的要求．但它的缺点也很明显，那就是枯燥乏味．我深知，没有多少人有耐心能够从头到尾地把《几何原本》读完．那么，与之相对的另一个思路，就是完全实用化的思路，我可以分别讲看图和作图，分别讲求长度、求面积、求体积的方法，然后再讲一些日常生活和工作的例子．但是，如果这样讲述，我就把一本《几何原本》，硬生生地讲成了《九章算术》．如此，不但几何学中的美感荡然无存，而且也丝毫不

能提升学生的逻辑推理能力．怎么样把学术性和实用性结合起来，怎么样使课程编排兼具知识性和趣味性，怎么样让孩子爱上数学，这才是我的最终目的．我绞尽脑汁地思来想去，最终决定：不做严格的分类！这也算无招胜有招吧．我的具体思路是这样的：

我要从《几何原本》的几个公理和公设出发，从人类最早使用几何学的起点出发，沿着历史一路走来，一边解决具体问题，一边把这些几何定理重新发现一遍，再在中间穿插一些解题思路，最后再讲一些现代生活中的具体应用．应该说，这个思路是没有什么章法可言的，但是我认为这样讲是合适的，因为代数知识就像一座庄严的宫殿，欣赏代数的美就得站得高高的，从上至下宏观地看待；几何知识就像一座瑰丽奇妙的苏州园林，只要能够身临其境，无论从哪个角度看，我们都能发现它独特的美．而如果看几何知识像欣赏代数一样，只是站在高高的位置上看一张平面图，就感受不到几何应有的美感和趣味了．因此，在后续的几何学课程中，我会徐徐展开人类历史的画卷，像讲故事一样把几何的定理的始末缘由娓娓道来．那么，现在就让我们回到5000年前的古埃及，面对刚刚被尼罗河水冲刷得一干二净的广袤原野，我们拿着手中的绳子，准备重新把土地分给大家．

当面对一望无际的原野时，我们首先应该想到的，不是欧几里得的几条定义和公理，而是一个更基础的问题，什么叫面积？欧几里得没有给出面积的定义，我们得自己找！我们知道，平分土地的目的是耕种，那么简单地说，所谓面积相等，就是说两块土地里能够种下的粮食一样多．因为种粮食的时候，种子都是按照行列的方式播种的，所以，我们就可以按照植株的行列数的乘积来衡量一块土地的大小．因为土地是一个平面，又因为它需要长、宽的乘积来计算大小，所以我们就把长、宽的乘积叫作土地的面积．那么，如何判断土地面积是否相等呢？最直接的办法就是种好庄稼看一看，如果种的植株一样多，那就是一样的．可惜这样的办法行不通，因为我们不能在分土地之前种庄稼，而且植株的距离可能会稍微有点差别，以它为基准是不精确的．

那么，如何判断面积是否相等呢？最简单的方法就是：如果两块土地的形状大小完全一样，我们就可以认为它们的面积是相等的．但什么叫完全一样呢？如果我们能够把一块土地搬起来，挪到另一块土地上，

两块土地能够严丝合缝地相互重叠，那我们就认为这两块土地的大小是完全相等的．没错，相互重合的两个图形全等，这就是第一条最基本最重要的公理．可问题在于，土地是搬不动的，那怎么办？很简单，我们可以把一块巨大的牛皮蒙在这块土地上，把它裁剪成这块土地的形状，按照牛皮的大小形状重新划出一块土地，那么这两块土地的形状肯定也是一样的．不错，这就是第二条公理：与同一个物体（这里是牛皮）相等的两个物体彼此也相等，在代数里我们曾经学过等式的传递性，它在几何学里就是第二公理．可是，土地太大了，一张牛皮蒙不下，怎么办？用几张牛皮合起来也是一样的，这就是第三条公理：整体等于部分之和．那么，如果几张牛皮也不能把整块土地盖住，我们可不可以用这几张牛皮覆盖两次呢？第一次都覆盖住一部分土地，然后，挪到另一个地方再根据牛皮的样式划出同样的一块土地；而后再来一次，把土地的另一部分也这样挪动过来，听起来也是可以的，因为两次规划的土地分别等于原来的土地的一部分，所以它们的和应该也是相等的．等量加等量和相等，等量减等量差也相等，这又是两条独立的公理．于是，欧几里得的5条公理，[1] 全部都在这里了：

（1）相互覆盖的图形是全等的；

（2）与同一事物相等的两个事物彼此也相等；

（3）整体等于部分之和；

（4）等量加等量，和相等；

（5）等量减等量，差相等．

其实，看了这5条公理，我倒觉得欧几里得挺笨的，他只算了等量的加减，没有关心等量的乘除，而且他应该把这几条公理合并成一条，那就是：任何等量经过相同的变化以后结果仍然相等．这句话看起来很眼熟，这又是什么呢？它就是我们学过的等式的协变性！不错，这就是《几何原本》的5条基本公理告诉我们的一切．简单来说，它告诉了我们什么是相等，以及等式的传递性和协变性．

当古埃及人拿着牛皮在地面上忙得不亦乐乎的时候，忽然有一个智

者哈哈大笑了起来："你们可真笨，为什么非要用整张牛皮覆盖住这些土地呢？"那么，关于平分土地，他又有哪些更好的办法呢？

(1) 编者注：欧几里得在《几何原本》中得出的5条公理原文如下：
（1）等于同量的量彼此相等；
（2）等量加等量，其和仍相等；
（3）等量减等量，其差仍相等；
（4）彼此能够重合的物体是全等的；
（5）整体大于部分．
为了便于理解，作者在本书中对顺序进行了调整，并对内容进行微调，书中第（3）条"整体等于部分之和"为原文第（5）条的延伸．

四　初窥几何证明

◎ 解决直角的牛皮：角度和垂直

古埃及人开始用牛皮覆盖住地面的方式来平分土地，可是有一位智者发出了不同的声音：我们为什么非要用整张牛皮把地面盖住呢？要想让土地的面积相等，只需要长、宽分别相等就行了．我们完全可以把牛皮搓成牛皮绳，直接用4根牛皮绳围着土地的边缘转一圈，把4条边的长度都用绳子记录下来，不就可以了吗？大家一想：好像也对，于是很快就都学会了这种新办法，这样一来就省得折腾那么多张牛皮了，分地的效率也大大提高了！事实上也没有那么多块牛皮可以用，现在我可以告诉你，用整张牛皮蒙住地面的办法压根就没有发生过．这只是为了讲清楚欧几里得的5条公理虚构出来的故事而已．但是，我们刚才提到的用绳子分别测量边长的办法，可是一直在古埃及流行了好多好多年的．尽管这种办法是错误的！

它的问题在于：只用绳子量取了土地的四边长度，并不能保证土地的形状是完全一样的，如果这块土地不是长方形的，换句话说，如果长边、宽边不是完全垂直的，那么用这种办法得到的图形，它就不是完全相等的．我们在小学的时候学过，长方形的面积等于长乘宽，但是平行四边形的面积，可不等于长乘宽，而是等于长乘高．可是古代埃及人，他们并不懂得这个道理．同时我要说明的是，如果平行四边形只是倾斜了一点点，它的面积和长方形的面积差得并不多．比如，当平行四边形的一个角度是80度时，看上去倾斜度就很大了，但是它的面积和斜边为宽度的长方形差距却不到2%．这一点微弱的差别很容易被忽略，所以在相当长的时间内，古埃及人没有发现这种方式存在的问题．然而，历史在发展，人类在进步，随着测量精度的不断提高，他们就慢慢感觉出来了，虽然长宽一样，但是这个倾斜着的土地它好像就是不如长方形的地种出来的粮食多．于是，大家都不愿意要平行四边形的土地了，大家都希望能把土地分割得方方正正的．可问题是，要想把土地分割成长方形，我们就得保证土地的4个角都是直角．那么新的问题来了，我们用牛皮和绳子，怎么样才能做出完美的直角呢？

这时，又有一个人发明了一个好办法：首先他把一张牛皮上下对折一下，于是就会在牛皮上折出一条直线的折痕来，然后他再把这张牛皮左右对折一下，对折的时候把原来折的那条水平线对齐了，这样就又折出一条新的折痕来．（如图4 - 1）经常玩折纸的人，应该很容易理解我的意思，其实就是通过两条折痕，在白纸上折出一个十字来．现在就好办了，这个十字中的任何一个角都是直角了．这种操作本身很简单，大家很容易掌握，可是我要问：为什么通过这种办法得到的角就是直角呢？其中的关键在于，我们在折牛皮的时候，是把前面的那条折痕对齐了的，既然是对齐了，那就说明折出来的两个角是相等的，在此过程中我们利用的是几何学的第一公理：相互覆盖的两个东西相等．那么，这两个相等的角又分别是多少呢？由于这两个角的角度加起来是一个平角，所以它们的大小就是平角的一半，180度的一半是90度，所以它们当然就都是直角了．在这个过程当中，我们可以发现，任何一张牛皮、任何一张纸，只要是按照这种办法对齐了折两次，他们得到的角都是直角，角的度数也都是一样的．这就是欧几里得的第一个重要的公设：凡是直角都相等！[1]

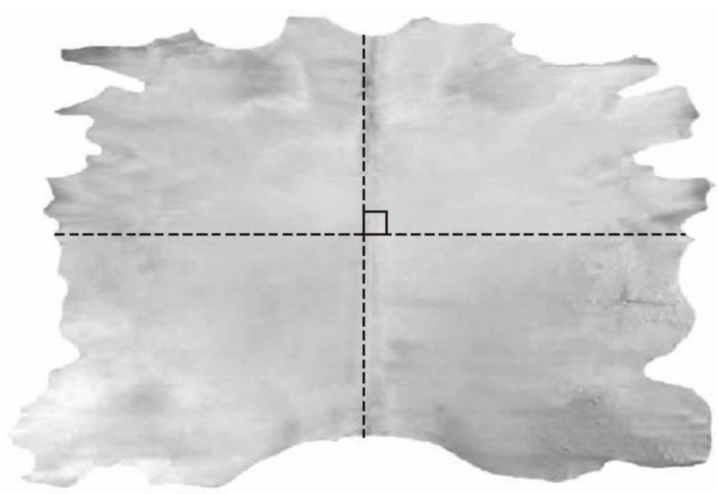


图4 - 1

不过古埃及人可不懂这么多，它们只知道靠着折叠牛皮的办法，就可以快速得到直角了，然后只要带有十字折痕的牛皮，往地上一扔，只要土地的长、宽两条边和十字对齐了，那就说明这个土地是方的．这块牛皮好不容易被细绳取代了，但因为要解决直角的问题，它又重新走回

来了，看来分土地还是离不开牛皮的帮助．

古埃及人可以不管直角是什么，但是我们却不能不管，现在我们需要继续研究几何问题：直角的定义是什么？除了直角之外，还有哪些角？小学的时候我们就学过，角是射线围着它的端点转出来的结果．如果这条射线转了一整圈，那就是360度，叫作周角；如果只转了半圈，就形成了一条直线，这样的角度是周角的一半，因此就是180度，180度的角叫作平角．平角的一半就是90度，90度的角就叫直角．但是，我们之前说过，几何学是没有数字的数学，因此，我们不能通过90度来定义直角，那应该怎么表达呢？欧几里得的定义是：当两条直线相交时，如果相交所得的两个邻角相等，那么它们两个就都是直角．很明显，他是通过平角的一半定义直角的．同时他还指出：成直角的两条直线相互垂直，其中任意一条都叫作另一条的垂线．那么，如果这个角度小于直角呢？就叫作锐角．为什么叫锐角？因为这个角度看起来比较尖，比较锐利．反之，如果这个角度大于直角，就叫作钝角．这些知识都是我们小学的时候就掌握了的，现在新的问题来了，两条直线相交以后会产生4个角，这些角之间有什么关系呢？

如图4－2所示，AB 和CD 两条直线相交，产生了一个X形：其中上下的两个角∠1和∠3共用了同一个顶点，还共用了两条直线，这个状态看起来是针锋相对的，就像两个牛犄角对着顶在了一起，所以我们就把这对角叫作对顶角．同样，左右两边的∠2和∠4也是对顶角．只要是共用一个顶点，共用两条线的一对角都叫对顶角．那么，像∠1和∠2这样紧挨在一起的又是什么关系呢？由于∠1和∠2是一条直线被另一条直线裁成两半了，又因为它们两个彼此紧邻着，所以我们就把这样的一对角叫作邻补角．因为可以拼成一个平角，所以两个邻补角之和等于180度．

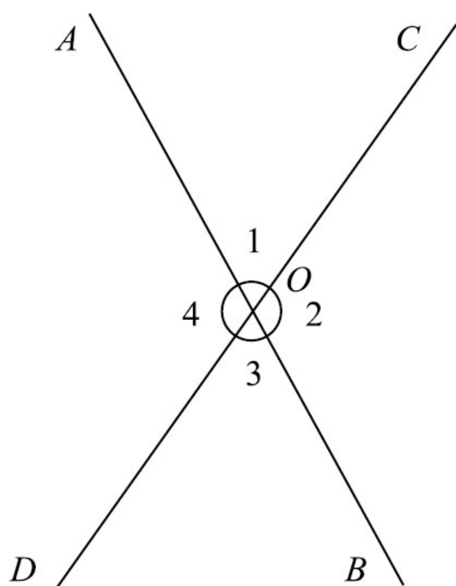


图4 - 2

这个邻补角等于180度很容易理解，那么对顶角∠1和∠3是什么关系呢？凭直觉我们都能想到，这两个角肯定是相等的关系．但是为什么两条直线相交以后，产生的对顶角就一定是相等的呢？

◎ 世界上第一个几何证明：对顶角相等

根据我们的直觉，两个针锋相对的对顶角，它们的大小应该是相等的，但是为什么这两个角会相等呢？有人说，这很简单，我们有几何学的第一公理，只要把这两个角度折过来相互覆盖一下不就知道了吗？我们还可以用剪刀把一个角剪下来，和另一个角拼合在一起，如果这两个角相互覆盖，就是相等的呀！没错，你提出的这种方法确实能证明这两个角是相等的．但我要让你证明的是：世界上所有的对顶角都是相等的．这又该怎么证明呢？

瞧见没有，有意思的事儿来了，我们可以肯定的是，无论你在纸上画出多少个对顶角来，你都可以通过测量或者通过剪切的方式证明它们是相等的．但问题是，世界上有无数对的对顶角，你要经过多少次的验证，才能证明世界上所有的对顶角都是相等的呢？凡是直角都相等，这已经是一个无须证明的公设了．那么，对顶角相等也是一个无须证明的公理吗？因为，对顶角相等看起来也是简单直白的．而且我们还可以通过图4－3物理模拟的方法来体验一下对顶角的变化：

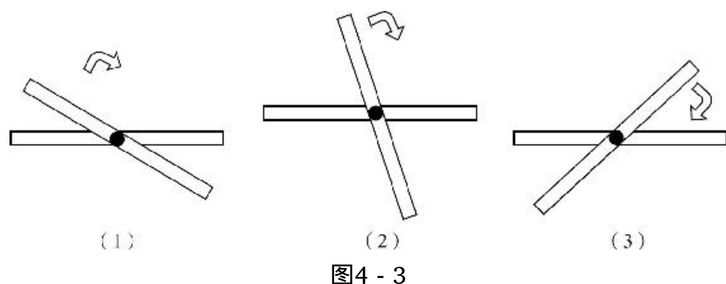


图4－3

我们在两根棍子中间钉上个钉子，用这个活动的十字架来模拟一下两条直线相交的效果．做好了以后，我们可以按住一根棍子不动，慢慢转动另一根棍子，于是我们就会发现，这两根棍子之间的两对对顶角要么一起增大，要么一起减小．开始转动时，两根棍子是重合的，我们也可以认为两根棍子的夹角是0度；当两根棍子慢慢转动到垂直的时候呢，角度都变成了90度；然后我们继续转动，等两根棍子再次重合的时候，我们又可以认为角度变成了180度．可见，无论角度具体是多少，反正这对顶着的两个角，就应该是相等的．那么，我们是否可以因此判

定世界上所有对顶角都相等呢？不能！为什么呀？因为，刚才通过两根棍子模拟两直线相交的时候，没有使用任何的公理和公设．这个效果模拟得再好，也只能作为一个类比，而不是一个严谨的逻辑证明．要想证明世界上所有的对顶角相等，只能从原来的几条公理中把它推导出来．那么，对顶角相等又该怎么证明呢？

如图4－2所示，在AB 、CD 相交形成的X形中，上下两个角∠1和∠3，是一对对顶角；左右两个角∠2和∠4，也是一对对顶角．要想证明对顶角相等，就必须找到支撑这个结论的已知条件和已有的公理定理．那我们就得好好看一看，在这个两直线相交形成的X形上，还有哪些条件与此问题有关，同时再认真想一想，我们已经学过的那些公理之中，有没有哪个公理是和对顶角有关系的．现在我们就来寻找一下相关的条件．

因为对顶角相等是我们要证明的结论，所以在找寻已知条件的时候我们就要先从其他角度找起，因为我们现在并不知道对顶角是什么关系，所以上下的∠1和∠3就先不看了，我们看看上边的∠1和左边的∠4是什么关系？显然，它们是一对邻补角．因为它们相当于直线CD 被直线AB 切分开了，所以∠1和∠4相加肯定等于一个平角．我们接着再往下看，下边的∠3和左边的∠4是什么关系呢？也是一对邻补角，∠3和∠4拼合起来以后，就是从左上到右下的直线AB ，因此∠3和∠4相加也等于一个平角．现在就有意思了，左边的∠4和上、下两个角都有关系，它和上边的∠1是邻补角，相加等于一个平角，和下边的∠3相加也是一个平角．∠4分别加上∠3和∠1以后，都等于平角，那是不是说明∠3和∠1是相等的呢？不对！因为公理里头没有这么一条．公理里头说的是等量加等量和相等，并没有说如果等量加上不同的两个东西以后相等，这两个东西也就相等．那怎么办？我们可以把等式变个形，左边∠4加上边的∠1等于平角，是不是也可以写成∠1＝平角－∠4呢？同理，左边的∠4加下边的∠3等于平角，也可以写作∠3＝平角－∠4，∠1和∠3都等于平角减∠4，这符合哪条公理呢？等量减等量差相等．于是我们就知道了，上下两个角一定是相等的．对顶角相等被证明了吗？没有，以上只是我们的思路，接下来，我们就写出第一个严格的证明过程：

$\because \angle 1+\angle 4=\angle COD=180^\circ$，

$\therefore \angle 1=180^\circ-\angle 4$．

$\because \angle 3+\angle 4=\angle AOB=180^\circ$，

$\therefore \angle 3=180^\circ-\angle 4$．

又$\because \angle 1=180^\circ-\angle 4$（已证），

$\therefore \angle 1=\angle 3$．

以上就是一个几何定理的完整的证明过程．在这个过程中，我们所有的根据都是来源于基本的公理，推理过程的先后顺序也是严密的、无懈可击的．你别看这个过程很简单，这可是数学家泰勒斯在公元前7世纪才证明了的．在此之前，没有任何人知道为什么对顶角是相等的．通过这个严谨的证明过程，我们可以感受到古希腊数学家那种一丝不苟的精神．以后我们在做证明题的时候，也要时刻提醒自己，每一步的根据是什么，不能无中生有地编造一个定理，也不能在证明过程中跳过几个步骤，即使这些步骤是显而易见的，也必须一条一条地给出详细说明．

这时候，也可能会有人提出质疑，人家让你证明世界上所有的对顶角相等，你不也只是证明了纸上画的一对对顶角吗？证明过程的精妙就在这里了，虽然我在纸上只是画了一个图，但是因为我没有说自己画的角的大小是多少，因此，我所证明的不仅是我画的这一张图，这一对角．在图中我们用到的所有条件，都是世界上任何一组对顶角拥有的基本条件，因此虽然我证明的是一对对顶角相等，但它们可以代表世界上所有的对顶角都相等．这就是没有数字的数学，这就是我们在不知道角度是多少的条件下，仍然可以知道两个角是相等的．如果我们不用这种逻辑证明，而采用量角器测量或者采用覆盖法验证，那就只能验证某两个具体的角是相等的，而无法证明世界上所有的对顶角都相等．

可能也有人会说，对顶角相等这么明白的事实，即使不用证明，我们心里也是清楚的．还真不是这样．要知道，从最基本的公理出发，仅仅是定理就400多个，从这400多个定理再次出发，间接证明的现象何止几千几万，而要想让那些看起来不是很直观的定理得到证明，就必须在这些看起来很明白的定理上下足功夫．这叫不积跬步，无以至千里．

【更多书籍分享vx:booker113】

◎ 让数学家头疼了2000多年的问题：平行公理

有一个让数学家们头疼了2000多年的一个问题：平行！

我们小学时就学过画平行线，为什么平行还会让人头疼呢？因为平行是所有定义中最难说清的．《几何原本》上的定义是：在同一平面上，永不相交的两条直线就叫作平行直线．这句话听起来还是可以理解的，因为直线是无限长的，如果这两条直线不平行，只要它们不断地延长下去，间距肯定会不断地收紧变窄，最后一定会相交．所以我们说，同一平面内，不相交的线是平行线．然而，难点是我怎么知道两条直线是平行的呢？难道真的要把两条直线无限地延长吗？如果这两条直线只是非常接近于平行，我们就得延长到宇宙的另一头才能看到它们相交，那不累死了呀！因此，我们只能通过别的办法判定．什么办法？

欧几里得给出的办法是：让这两条直线和第三条直线相交．如果相交以后，在同一侧内的两个角加起来等于180度，这两条直线就平行．这就是《几何原本》的最后一条公设——第五公设的等价命题．到现在，我们已经把欧几里得的五条公设全部说清楚了：第一，两点之间只能画一条直线，简称两点定线；第二，直线无限长；第三，给定半径和圆心可以画个圆；第四，所有的直角都相等；第五，两直线被第三条直线所截，如果相交在同一侧的两个内角相加等于平角，这两条直线就是相互平行的． [2] 和前几条公设相比，第五条的描述太复杂了，所以这也是最让人头疼的一条公设．

第五公设之所以让人头疼，就是因为它不太直观，于是很多数学家就想办法把它从公设里头剔除掉，如果能够通过其他的公理把它给证明了，把它降级为一个定理就更好了．可惜的是，2000多年过去了，没有任何人取得成功．不但没人成功，反而有人证明了第五公设不可能通过别的公理证明！而且还有人陆续发现了不遵循第五公设的新的几何学，关于第五公设有意思的故事有很多，即使讲一天也讲不完，所以我们就不展开讨论了．目前我们学的还是欧氏几何，所以我们只能先把它当作一个公设给记住了．接下来，我们就研究一下两条平行线被第三条直线

所截的情况．我们知道，两条直线相交可以产生四个角，那么如果两条平行直线被第三条直线所截就会有两个交点，产生八个角，如图4－4所示．我们的故事就从这三条线和八个角的关系开始了．

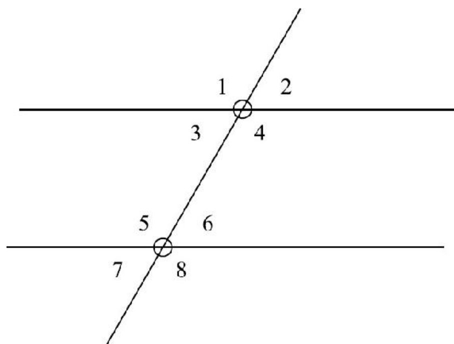


图4－4

两条相互平行的水平直线被一条斜线所截后，产生了从∠1到∠8的八个角，图中∠4和∠6的关系就是第五公设所说的，在截线同一侧的两个内角，因为它们都在截线的右侧，而且在平行线的内侧，所以它们两者之间的关系叫作同旁内角．当然，在它们对面的∠3和∠5也是一对同旁内角，因为它们同在截线的左侧，并且也在平行线的内侧．根据第五公设，我们可以推导出：如果两直线平行，同旁内角相加就等于180度．

同旁内角相加等于180度就能证明两直线平行，简称同旁内角互补，两直线平行．这就是平行线的判定定理．同理，既然这种方法能够判定平行了，那么是不是说两条直线平行，它产生的同旁内角就一定互补呢？没错！两条直线平行，同旁内角互补，这也是一条定理，叫平行线的性质定理．性质定理和判定定理有什么区别？性质定理是在已经知道这两条直线平行的条件下，可以由此得出哪些角的关系；而判定定理是说，在不知道这两条直线平行的情况下，应该通过什么条件才能判断两条直线平行．那么，是不是只要把判定定理反过来就可以得到性质定理呢，是的！比如，四个角是直角就可以判断一个四边形是长方形．那反过来长方形肯定是四个角相等的．但是，性质定理反过来能得到判定定理吗？这就不一定了，因为图形的性质不止一个，比如正方形的性质既有四条边相等，也包含四个角相等．我们不能根据其中的一个条件就判定某个图形一定是正方形！好了，接下来我们继续讨论平行的问题．

在一个相对复杂的图形上，如何快速找出同旁内角呢？我们可以借助图4－5中的字母或者汉字的帮助学习一下．

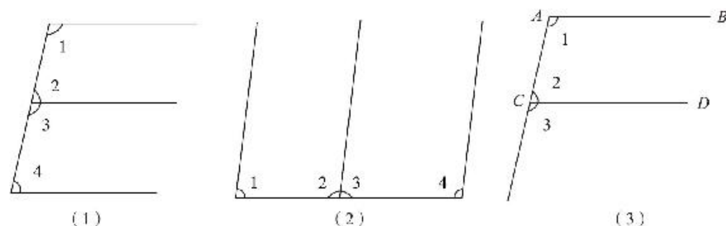


图4－5

在大写的英文字母“E”中，由于有上下两组平行线存在，因此我们至少可以找到三组同旁内角：“E”字图中的∠1和∠2，∠3和∠4，以及∠1和∠4，都是同旁内角的关系；同样，在汉字“山”字形的内部，也有着同样的三组同旁内角．由于我们心中对这些常用字母和汉字有着非常深刻的印象，因此，在面对一个复杂图形的时候，可以利用这些符号快速捕捉到图形的特征．

说完了字母“E”和汉字“山”，我们再说说字母“F”．在一个大写的“F”中，同样存在水平的两条平行线被一条斜线截断的情况．在“F”中，两条水平线中间的∠1和∠2，仍然是同旁内角的关系，两者之和仍然是180度，但是，在“F”中下面的∠3和上面的∠1又有什么关系呢？显然，∠3和∠2是邻补角的关系，因此，∠3和∠2相加也是180度．记得在我们证明对顶角的时候也发生过类似的情况：两个角加上同一个角都等于180度，这就可以证明这两个角相等了，过程如下：

∵$AB\parallel CD$（已知），

∴∠1＋∠2＝180°（两直线平行，同旁内角互补），

∴∠1＝180°－∠2（上式两侧同时减去∠2）．

又∵∠3＝180°－∠2（邻补角的定义），

∴∠1＝∠3（等量减等量，差相等）．

像“F”形上下的这两个角（∠1和∠3），因为它们都在两条直线下方的右侧位置上，所以我们把它们叫作同位角．两条直线平行，同位角相等，这就是平行线的第二个性质定理．同样，由同位角相等，我们照样可以推出同旁内角互补，所以根据同位角相等，我们也可以判定两直

线平行，这就是平行线的第二个判定定理．那么，除了字母“F”，还有其他方式能够发现同位角吗？如果把不等号放大一下（见图4－6）我们就会发现：在不等号上，有不止一对同位角，两条水平线的左上的∠1和∠5、左下的∠3和∠7、右上的∠2和∠6、右下的∠4和∠8都是同位角，这四对同位角都是彼此对应相等的．

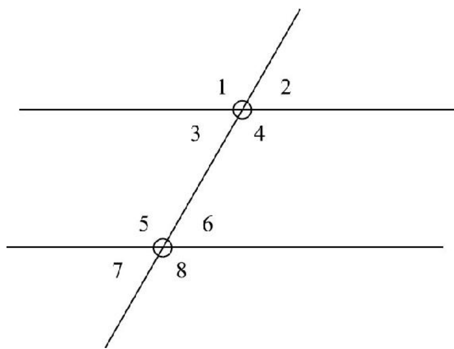


图4－6

此外，在这幅“三线八角”的图上还有一个角，和同位角对着的，就是同位角的对顶角，比如在右上角的方位上：∠6的同位角是∠2，∠2的对顶角是∠3，∠3和∠6共用一条边，其他两条边相互平行，结果拼成了一个“Z”字形，那么它们之间是什么关系呢？显然，因为∠3和∠2是对顶角，它俩是相等的，又因为∠2和∠6相等，所以∠3和∠6也应该是相等的．因为这两个角存在于两条平行线内部，同时又交错分布在截线的两侧，所以就叫内错角．没错，字母“Z”的上下两个角就是一对内错角，同样，字母“N”的左右两个角也是内错角关系，除了∠3和∠6之外，∠4和∠5也是一对内错角．内错角相等同样既是平行线的性质定理，又是它的判定定理．

同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，这三个性质就是平行线的基本性质，同时，这三者之间具有等价的关系，三者中的任何一个，都可以判定两条直线之间的平行关系．而这些定理全部都是源于欧几里得第五公设．

◎ 让分土地的工作大大简化：平行线的证明

首先，我们看一下字母“W”．如图4 - 7（1）所示，“W”下边的这两个底角是什么关系呢？字母“W”一共包含了四条直线，底下这两个角之间根本就没有共同的边，不符合两条平行线被第三条直线所截的条件，平行线的几个定理看似一点忙都帮不上．仔细找找我们就会发现：第一条线和第三条线平行，第二条线和第四条线平行，也可以认为“W”就是在一个字母“N”的左边多加上了一笔形成的．如果把图中左边的一根直线遮住，剩下的部分就是字母“N”．字母“N”我们已经在前文中提到了，它是由两个内错角组成的，也就是说，∠2应该是等于∠3的．接着看，左边这个底角∠1和上边的顶角∠2有没有关系呢？如果我们把右边这条直线遮住就又会发现，左边的图形就是一个反写的“N”，因为“W”的第一笔和第三笔是平行的，所以∠1和∠2也是内错角的关系，它们两个也相等．∠1和∠3都与∠2相等，那不是说明这两个底角也相等吗？思路有了，下面我们就整理一下完整的证明过程．

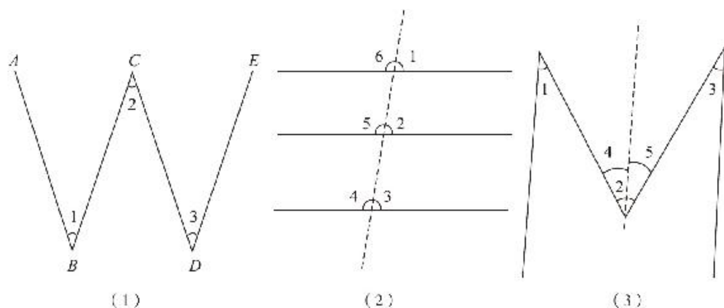


图4 - 7

∵AB∥CD（已知），

∴∠1 = ∠2（两直线平行，内错角相等）．

又∵BC∥DE（已知），

∴∠3 = ∠2（两直线平行，内错角相等）．

又∵∠1 = ∠2（已证），

∴∠1 = ∠3．

接下来，我们讨论一个看起来很简单的证明题．一个汉字“三”，已知第一条直线和第二条直线都与底下的第三条直线平行，求证上边两条直线也平行！够简单的吧，我们只需要扫一眼就知道平行，还用证明吗？是的，就是让你证明它，而且要求你必须用刚学的这几条判定定理来证明．请问你怎么证明呢？要知道，我们刚才学的可是两条直线被第三条直线所截，但是在这个题目里面根本就没有相交线，也就更没有同位角、内错角这些东西，那我们怎么运用这些定理呢？没有不要紧，我们可以给它添加一条线，不过首先得明白，这条直线并不会影响原来的直线，人家原来的线该平行就是平行，该不平行仍然是不平行，不会因为增加了直线而改变了原图的性质．既然如此，为什么非要加上这条线呢？为了让我们学的东西能用上，为了让题目更简单．

我们在汉字“三”的基础上从上到下画上一根倾斜的竖线，汉字“三”就立刻变成“丰”字［见图4－7（2）］．“丰”字一出现，一切都变得简单明朗了：左右两边立刻出现了很多对同位角、内错角．以右边为例：因为上下两条直线平行，所以它们在右上角的一对同位角∠1和∠3就是相等的．同样，中间的第二条线和下面的第三条线也是平行的，它们右上角的∠2和∠3也是一对相等的同位角，由于∠1、∠2都和∠3相等，不就可以证明∠1和∠2也相等了吗？反过来，我们知道了这两个角相等，是不是也就证明了第一条直线和第二条直线平行了？没错，到这里我们就完整地证明了这个定理：两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也相互平行．这也是一个标准的平行线定理，在以后遇到此类问题时可以直接使用它．在上述的证明过程中，我们要知道，当题目中给出的图形不够直观的时候，我们可以通过强行增加一条线或者几条线，来让证明过程变得明朗起来，这种凭空增加上去的线，它的作用是辅助我们证明的，所以叫作辅助线．当我们的证明受阻的时候，就可以尝试增加一条辅助线．下面我们就研究一个高难度的问题．

如图4－7（3）所示，看一下英文字母“M”内部的几个角之间有什么关系呢？一眼看过去，字母“M”好像只是把“W”反过来了？既然“W”的两个底角是相等的，把它反过来就变成了“M”的顶角，“M”的这两个顶角肯定也是相等的呀？别着急，如果我们仔细看就会发现：“M”和“W”还真不一样，这“W”是敞着口的，它最左边和最右边的

两条线不平行；但“M”可不一样了，“M”左右两边是平行的，而且外侧的两条线和中间的两条线却不平行．那么，外侧的两条平行线有没有被第三条直线所截呢？对不起，仍然没有！这“M”的中间是一个“V”字形，“V”是由两条直线组成的，如果是一条线的话，“M”就变成“N”了．那怎么办呢？图中有平行线，但是却没有被第三条直线所截，中间的两条线又都帮不上什么忙．让我们再仔细分析一下：

题目让我们求的是“M”这个字母中的三个角的关系，但是由于第一条线和第三条线不平行，所以左边的∠1和中间的∠2肯定是不相等的，∠2看上去就比∠1大很多．它们有什么关系呢？最简单的办法就是：在这个大的角∠2里面裁剪出一个和这个小角∠1相等的角来，然后再在两者之间做对比，怎么裁呢？经过“M”的中间那个点，从上到下画一条和左边的竖线平行的辅助线，根据刚学的三线平行的定理可以知道：因为这条辅助线和左边的竖线平行，右边的竖线也和左边的竖线平行，所以新画出来的辅助线肯定也和右边的竖线平行．问题就变简单了：经过辅助线一切，这一个字母“M”，就变成贴在一起的两个“N”了，左右两边各有一对内错角，左边的∠1和中间靠左的∠4是一对内错角，右边的∠3和中间靠右的∠5是一对内错角，它们分别对应相等．而且我们还知道，∠4和∠5是从∠2切分出来的两个角，由于整体等于部分之和，所以∠2 = ∠4 + ∠5．因此，我们就知道，在字母“M”中，中间的角等于左右两个顶角的和．

古埃及人懂得了平行线的定理以后，分土地的工作就被大大简化了．在此之前，他们要确定一个角是不是直角，只能用画着十字的牛皮一个角一个角地比对．现在好办了，只要知道两个角相等，就知道了土地的两条边是平行的，进而可以快速地知道其他角度的情况．如果得知了其他的几条边也是平行的，只要再验证其中的任何一个角是直角，就意味着所有的角都是直角了．不过，大自然中河流弯弯曲曲，山脉起起伏伏，哪儿有那么多方方正正的土地让你去分呢，那么当他们遇到其他形状的土地时，又该怎么办呢？

(1) 编者注：在欧几里得《几何原本》中为第四公设：凡直角都彼此相等．

(2) 编者注：欧几里得在《几何原本》中的五大公设原文为：

（1）任意一点到另外任意一点可以画直线：

（2）一条有限线段可以继续延长：

（3）以任意点为心及任意长为半径，可作一圆；

（4）凡是直角都相等；

（5）两直线被第三条直线所截，如果同侧两个内角的和小于两个直角的和，则这两直线经无限延长后在这一侧相交．

作者在本书中对其顺序和表述进行了调整，本书中说的第五公设为原文第五公设的等价命题．

五　从分土地开始

◎ 分土地，先关注三角形的内角和外角

虽然土地的形状千变万化，但是都可以被近似地分割成多个大小形状不等的三角形．因此，我们只要掌握了三角形的性质，平分土地就变得相对容易了．那么，三角形又有哪些性质呢？三角形有三条边和三个角，三角形的内角之和是180°．那么，你有没有思考过背后的原因呢？世界上有那么多大小形状不同的三角形，为什么它们的内角和都是180°呢？当然，我们可以尝试把另外两个角剪下来拼在一起，验证一下三个角能不能拼成一个平角就可以了，这被称作割补法．割补法的缺点也很明显，它只能证明你画的那一个三角形的内角和等于180°，而不能证明世界上所有三角形的内角和等于180°．当你面对的是任意一个三角形的时候，又应该怎么证明呢？其实，学会作辅助线以后就明白了，即使我们不用剪刀，照样可以构造出一个一模一样的角来：

如图5－1所示，在任意一个三角形中，三个内角分别是∠1、∠2和∠3，我们现在要证明的是这三个角相加能够凑成一个平角．应该怎么办呢？前文中曾经提到过：要想让角和角之间相互加减，最好的办法是挨着一个角，把另一个角给作出来．在这个三角形中，我们要想让∠1加上∠2，最好的办法就是挨着∠1作出一个和∠2相等的角来．如何画出和∠2相等的角呢？让我们假设一下，如果我们在一个三角形的顶点上作出了一条线，这条线和三角形左边的夹角∠4等于∠2，那么这两个角和我们新作出的辅助线之间是什么关系呢？它们是不是组成了一个字母“Z”的形状呢？字母“Z”内的这两个角不就是内错角吗？内错角相等，两直线平行，因此我们只要经过三角形的顶点，作一条和底边平行的直线，立刻就可以得到和左边的∠2相等的一个内错角∠4．因为∠4和顶角∠1是挨着的，所以它们自然就可以相加了，按此思路我们继续处理右边的底角∠3，右边的底角∠3已经有一个与之对应的内错角了！由于我们新作的辅助线和底边是平行的，所以三角形右边这条线和辅助线之间的夹角∠5就和∠3是一对内错角．一根与底边平行的辅助线经过顶点以后，左边的∠4等于左边的底角∠2，右边的∠5等于右边的底角∠3，

正中间这个角是原来的顶角∠1，这三个角合并起来正好就是一个平角，由此我们知道三角形的内角和等于180°．在这里，因为我们作的这个三角形是任意一个三角形，所以就证明了任意三角形的内角和都是180°．完整的证明过程如下：

如图5－1所示，已知△ABC，过其顶点A作直线$MN\parallel BC$．

∵$MN\parallel BC$，

∴∠4＝∠2，∠5＝∠3（两直线平行，内错角相等）．

又∵∠1＋∠4＋∠5＝∠MAN＝180°，

∴∠1＋∠2＋∠3＝180°（等量代换）．

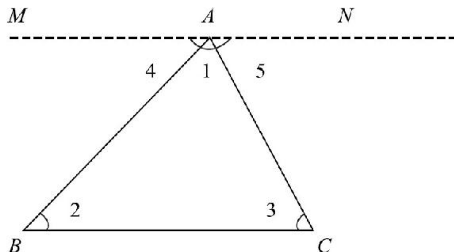


图5－1

那么，三角形内角和是不是只有这一种证明方法呢？当然不是！接下来我们尝试一种新的方法：过顶点A作AM平行于BC，这时，我们只知道∠4＝∠2，右边的∠3找不到对应相等的角了，怎么办？我们把三角形右边CA往上延长了（延长CA至P），让这条线从顶角这个地方冒出头来．如图5－2所示，就像三角形ABC长出来了一根天线AP，那么AP和AM的夹角∠6，和三角形右边的底角∠3是什么关系呢？这两个角是不是一对平行线AM和BC，被直线PC截断所形成的呢？而且这两个角是不是都是在平行线左上角呢？所以这两个角就是同位角的关系．这样一来，我们又给右边的∠3找到了一个相等的角∠6．现在，三个角再次凑到一起了，在三角形顶角这个位置上，挨着顶角的∠4和左下角的∠2是内错角关系，所以∠4＝∠2，∠4上面紧邻的∠6又和右边的底角∠3是同位角关系，∠1＋∠4＋∠6仍然可以得到一个平角∠CAP，因此，这三个角相加仍然是180°．完整证明过程如下：

已知△ABC，过其顶点A作直线$MA\parallel BC$．

∵$MA\parallel BC$，

∴∠4＝∠2（两直线平行，内错角相等）．

延长CA 至P ，得到

$\angle 6=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）．

又$\because \angle 1+\angle 4+\angle 6=\angle CAP=180^\circ$，

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$（等量代换）．

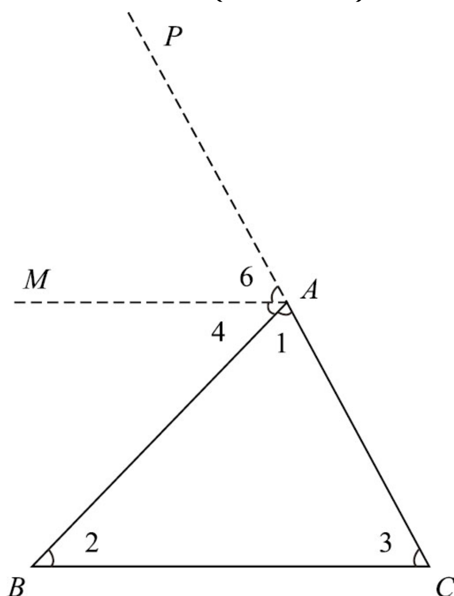


图5 - 2

对于同一个问题，我们为什么要证明两遍呢？因为我要介绍给你三角形的另一个性质：当我们延长了三角形的一条边以后，比如右边的CA，它就会从顶点冒出头儿来得到射线AP ，此时AP 就和原来三角形的左边AB 形成了一个夹角$\angle BAP$ ，由于这个夹角在三角形的外边，所以就叫作三角形的外角．这个外角可以通过一条和底边平行的线AM 分成两部分∠4和∠6，两者又分别等于原来三角形的两个底角∠2和∠3．因此，我们就得到了三角形的外角定理：三角形的任何一个外角，都等于和它不相邻的两个内角和．

下面，我们再研究一个问题：如图5 - 3所示的一个沙漏形$ABCD$ ，已知沙漏的左边两个角$\angle C=\angle A$ ，求证右边这两个角$\angle B$ 和$\angle D$ 也相等．

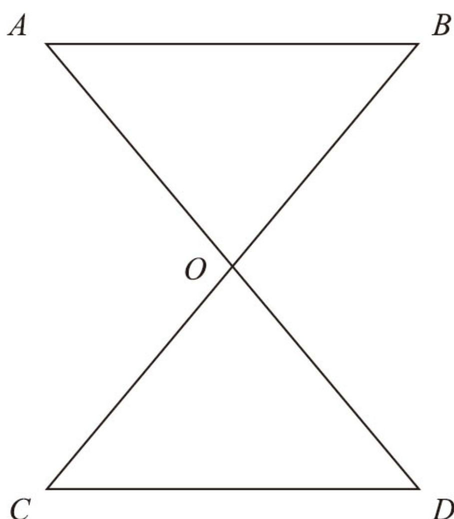


图5 - 3

这个问题怎么证明呢？题目并没有告诉我们上下两条直线AB和CD是平行的，告诉我们的已知条件$\angle A$和$\angle C$也不是同位角或内错角的关系，因此我们只能从其他条件入手．根据图示我们发现，沙漏形是两个三角形拼凑起来的，在沙漏的细腰附近，左右两侧的角都是上下两个三角形的外角，沙漏右边的$\angle BOD$是沙漏上边的三角形的外角，因此就是上面两个角$\angle A$和$\angle B$的和，同理，它又是沙漏最底下的两个角$\angle C$和$\angle D$的和，而且题目还告诉我们，左边这两个角$\angle C=\angle A$，因此，我们就很容易知道右边的两个角相等了．证明过程如下：

$\because \angle BOD=\angle A+\angle B$（外角定理），

$\therefore \angle B=\angle BOD-\angle A$．

$\because \angle BOD=\angle C+\angle D$（外角定理），

$\therefore \angle D=\angle BOD-\angle C$．

又$\because \angle A=\angle C$（已知），

$\therefore \angle D=\angle BOD-\angle A=\angle B$．

◎ 著名的三线合一定理

小学的时候，我们学过三角形的面积等于底乘高除以二．但是这属于算术方法，按照这种方式计算面积，必须要知道底和高的具体数值．可是，古埃及人没有皮尺，在不知道具体的长度和宽度的条件下能否计算面积呢？

几何学研究的就是没有数字的数学，就是要在不知道三角形的面积等于多少的条件下把土地分下去，这就要求我们必须弄明白三角形之间的面积关系．接下来，先讨论一个最简单的问题：怎么知道两个三角形的面积是不是相等的？最简单的办法，还是用欧几里得的第一公理：两个图形相互覆盖、相互重合就说明它们相等．可是你要是用这个公理的话，就又得拿出牛皮来，利用牛皮把这个土地覆盖住了，以此确认两块土地的面积是否相等．这不是“辛辛苦苦几十年，一夜回到了解放前”吗？

那怎么办？三角形不就只有三条边、三个角吗？能不能用边角关系来判断两个三角形是完全一样的呢？在几何学中，如果两个图形的大小形状完全相同，能够相互覆盖，我们就把它们的关系叫作全等，全等图形是可以相互覆盖的，这就意味着它们除了位置以外，所有的边、角都是对应相等的．对于两个三角形而言，全等的概念就是它们的三条边和三个角都分别对应相等．什么叫对应相等？就是自己的边和别人的边相等，两个相等的边对着的夹角也相等，这就叫对应相等．如果两个三角形所有的边、角都对应相等，它们就是全等的了，但是如果只有一部分相等呢？接下来，我们就从最简单的条件开始，逐一增加条件，看看增加到什么程度就可以判断两个三角形全等了．

我们先看一下最简单的条件：如果两个三角形，只有一条底边对应相等行不行呢？我们把这两个三角形放在一起后，其中底边已经对齐了，但由于这条边两侧的两个角并不相等，所以这两个角也就无法和另一个三角形相互覆盖．既然不能对齐，那就证明两个图形肯定不全等，所以只有一条边相等［如图5－4（1）所示］是不行的．

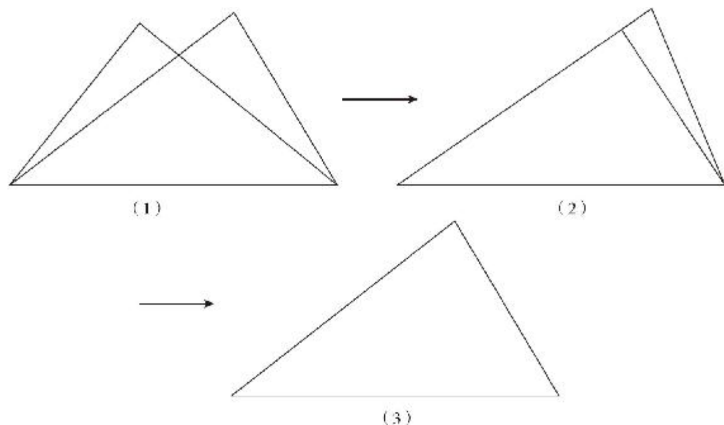


图5 - 4

接下来，我们再增加一个角相等的条件．假设这条边左侧的一个角也是相等的，那么这两个三角形相互覆盖的时候，不但这条边本身对齐了，而且左侧的那个角也就对齐了，角对齐了就说明左侧的那条边也对齐了．可问题是，左侧的两条边长度不同，这就会导致一个结果：左边的另一个端点没有重合，也就是说三角形的顶点没有相互覆盖，因此三角形的第三条边肯定不能相互覆盖了，这两个三角形也就不能算是全等的了［（如图5 - 4（2）所示）］．

我们再增加条件，刚才不就是因为左边的长度不相等吗？我们就再让它对应相等．

截至目前，我们就有3个条件了：一条底边相等，左侧的一个角相等，左侧的边也对应相等．这时候如果我们再次把它们相互覆盖就会发现：底边对齐了，左角对齐了，由于左边的长短一样，所以三角形的顶点也就对齐了，那么是不是三角形的右边也能相互覆盖了呢？是的．为什么呢？因为两点之间只能确定一条直线！这个三角形右侧的边的两个顶点都固定不变了，它的右边也就不能变了，只能是相互重合．［如图5 - 4（3）所示］于是我们就得到了三角形全等的第一个判定定理：两条边对应相等，并且两边的夹角对应相等，那么这两个三角形全等．这个定理简称“边角边”．以上的证明过程，也就是欧几里得在《几何原本》中记载的标准方法．

到这里，你可能会产生一个疑问，这样相互覆盖的两个三角形能够

代表世界上所有的三角形吗？我们不是曾经强调过，几何定理不能通过相互覆盖的方式来证明吗？是的，这种方法，的确不是特别稳妥，所以欧几里得也就只用覆盖法证明了这一个定理．而且，他还是通过反证法证明的．所谓反证法，就是首先我们假定一个命题是正确的，然后按照正确的推理方式推导，逐步得出相互矛盾的结果，最后就可以通过这个矛盾来证明假设是错误的．以这个定理为例，欧几里得的方法是：假设这两个三角形的第三条边相互不重合，这样就推导出一个结果，那就是过两个固定的点，可以画出两条直线，显然这个结论和我们的第一公设是冲突的．所以，我们就只能说，自己的假设是错误的，这两个三角形的第三条边，肯定也是重合的．“边角边”的定理就是这样．接下来，我们就用这个定理证明两个更显而易见的定理：一是三角形的三线合一定理；二是两点之间直线段最短．首先我们来看一下第一个定理．

如果一个三角形的两条边相等，那么它们对着的两个角就相等．两条边相等说明这个三角形是一个等腰三角形，两条腰对应的角就是它的两个底角．等腰三角形底角相等，这不是明摆着的道理吗？而且这也是我们在小学时学过的基本知识，为什么它还要证明呢？这就是几何学的严谨所在．接下来，我们就一起来分析．

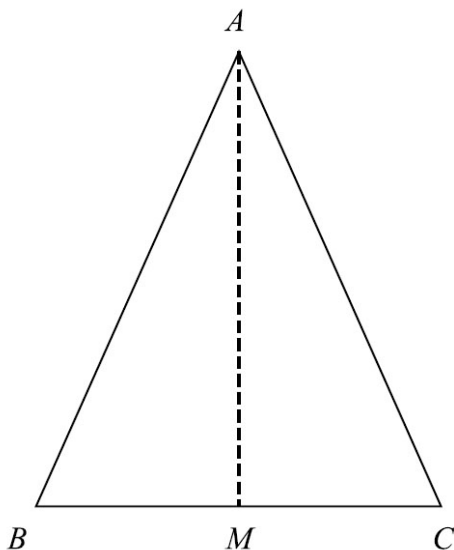


图5 - 5

任何一个角都是可以被平分成两半的，就像我们折纸一样，只要把

一张纸的对角对折起来，把边对齐了，再把纸张铺平，纸上自然就会出来一个折痕．这个折痕和现在的边之间的夹角，是相互重叠的，同时这两个角加起来又等于原来的角的大小，所以这个角就被平分了．之前我们用一张牛皮折叠出直角，用的也是这种办法．假设我们在等腰三角形的顶角中间画一条线，把顶角平分成两半，同时这个平分线还会和三角形的底边产生一个交点，这样一个等腰三角形就被完美地分成两半了．我们要想证明它的两个底角相等，只需要证明分开了的这两个三角形全等就可以了．

首先，这两个三角形是挨着的，它们共用一条边，也就是我们刚画出来的这条角平分线；同时，挨着这个角平分线的两个角是相等的，因为它是我们手动作出来的；而且，这个三角形的两条腰相等．现在，在这两个三角形中，两组边对应相等，中间的夹角也相等，于是我们终于凑齐了“边角边”的条件，所以这两个三角形就是全等的，因此，等腰三角形的两个底角一定相等．完整的证明过程如下：

在$\triangle ABC$中，过点A作AM平分$\angle A$，且交BC于点M．

$\because$在$\triangle AMC$和$\triangle AMB$中，

$AB=AC$（已知），

$\angle BAM=\angle CAM$（作图所得），

$AM=AM$（公共边），

$\therefore \triangle AMC \cong \triangle AMB$（边角边），

$\therefore \angle B=\angle C$．

通过两个三角形全等，我们还可以知道，等腰三角形底边被切开的左右两边BM和MC是对应相等的，且$\angle AMB$和$\angle AMC$也是对应相等的．要知道，这两个角加起来等于180°，所以它们两个都是平角的一半，即等于直角．这就是著名的三线合一定理：等腰三角形顶角的角平分线就是底边上的高，同时它还是顶点到底边中心的连线（简称中线）．

三线合一定理有没有让你感受到几何学的奇妙？接下来，我们要一起证明一个谁都明白的简单道理．

◎ 一个谁都明白的道理：两点之间直线段最短

要欣赏数学的美，有两种方式：一是通过简单的过程解决复杂的问题，用诗词形容就是“谈笑间，樯橹灰飞烟灭”，它会带给人一种痛快淋漓的感觉．二是通过复杂的过程来证明一个简单的道理，用诗词形容就是“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”，这种方式会让人感受到数学的奇妙莫测之美．为什么还会有人通过复杂的方式去证明一个简单的道理呢？这是因为在实际生活中，我们的身边随时随地充斥着大量似是而非的道理．

比如，我们相信“人的本性是善良的”，我们相信“只要付出就会有回报”，我们相信“正义一定会战胜邪恶”．很多时候，我们之所以相信一个道理，并不是因为这个道理正确，而仅仅是因为它恰好代表了我们的良好意愿．我们认为只有相信这些道理才会使自己积极向上，才会使生活变得更加美好．实际上，这种观点和“只要相信上天，上天就一定会保佑你”没有任何的区别．

这些似是而非的话，全部来源于我们自己的一厢情愿．甚至我们还会产生更加莫名其妙的理论：因为一个习惯保持了几千年，所以肯定有它存在的道理；因为这个话出自某个经典著作，所以它一定是对的；因为唐僧经历了九九八十一难，所以他取来的就一定是真经．凡此种种，不一而足．这些世俗的观点使人确信：只有愚昧的人才缺乏怀疑精神，只有无知的人才会不问缘由．相反，只有渊博如老子的人才知道自己的无知，只有谦虚如苏格拉底的人才会对一个简单的问题不厌其烦地追问下去．

人的一生能不能做出自己的成就是难以预料的，然而人的一生是否在无知中度过却几乎完全取决于自己．要想让自己的一生在光明中度过，就不能盲目相信任何一个道理，无论这个道理看上去多么简单、多么直白，也必须要经过理性的检验．而要检验一个理论，只依靠部分的事实验证是站不住脚的．最简单有效的办法就是依靠逻辑推理．比如，流传很久的比萨斜塔上的自由落体实验，其实就只是一个伽利略的思想

实验．

此前亚里士多德曾经告诉我们，重的物体下落得快，轻的物体下落得慢．而且，他还以羽毛和石头的下落过程为例对此做出了证明．如果你按亚里士多德的方式去检验，无论你试验多少次，都会发现石头下落的速度比羽毛要快．但伽利略没有做实验，他只是用自己的理性做了一下推理，通过反证法证明了亚里士多德的这个结论是错误的．

假设一块石头1千克，另一块石头10千克，那么按照亚里士多德的理论，10千克的石头下落会快一些，这没什么问题．但是，如果我把10千克的石头和1千克的石头绑在一起再次抛落，又会发生什么情况呢？从总重量来看，它们的和是11千克了，应该下落得更快才对；然而从另一个角度来看，这1千克的石头会比10千克的石头下落得慢，所以在下落途中它一定会拖拉那个10千克的石头，使10千克的石头下落得比之前更慢了，这就像一个成年人拉着一个孩子一起赛跑，他们一起跑步的速度，肯定不如成年人自己跑快．这样看来，无论11千克的石头下落得更快还是下落得更慢，都是不对的，两者之间发生了矛盾，因此亚里士多德的理论一定是错误的，这就是逻辑推理的结果，完全无须实验的帮助．

伽利略之所以能够发现真理，并不是因为物理世界有什么特殊性，而恰恰是因为隐藏在物理世界背后的，是严谨的数学逻辑．接下来，我们就一起探索一个最简单的定理，一起感受一下几何学逻辑推理的魅力．那就是：两点之间，直线段最短．

这同样是一个非常浅显、非常直白的道理．向别人提出这个问题的人，不仅不会受到尊重，往往还会遭受别人的耻笑．不过，要把这个直线段最短的问题说清楚，确实还得费不少工夫．

为什么这个问题很难呢？因为两点之间可以存在无数条路线，而且什么样的形状都有，要想画出一个通用的、能够代表所有线路的图形是不可能的，那我们又怎么证明呢？把这两个点和连接它们的直线段都画出来，然后我们得把所有可能的路线都简单抽象一下，给它们分个类，根据不同类别分别讨论．怎么分类呢？

简单来说，连结两点的线路之中，有一些曲线只在这个直线段的一侧，而另一些曲线围着直线绕来绕去，就像S形一样，它会穿过我们中间这条直线．（如图5－6所示）显然，后者的这种情况比较复杂，需要对S形的曲线做一下简化．我们可以分段来讨论：由于S形线路会把线段截成几段，如果其中每一段曲线都比对应的线段长，那么，我们就可以认为，把这些曲线加起来的总长度仍然比线段的总长度长．这样一来，我们就可以把穿过直线的这种S形的曲线，变成只朝向一边的弓形曲线来看待．换句话说，我们只要证明了弓形曲线中，绕弯儿的那根曲线比直线段长就可以了．

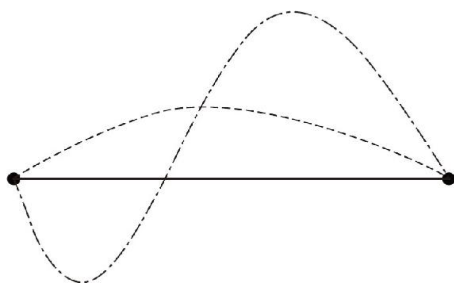


图5－6

◎ 用复杂的过程证明简单的道理

弓形曲线不一定是标准的圆形或者弧形，怎样计算出它的长度呢？接下来，我们还要继续简化．

在弓形曲线上画个点，然后把线段的两头分别和这个点连接起来，这样一来，弓形曲线就又被分成了两段，画出来的两条线段就成了一条折线，现在我只要证明直线段的长度小于折线段的长度，折线段的长度再小于外边的弓形曲线的长度就可以了，这相当于$a<b$，$b<c$，所以$a<c$．首先要证明弓形长度大于折线段长度，然后再证明折线段长度大于直线段长度．

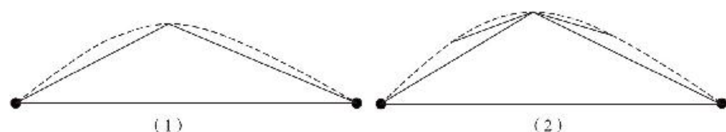


图5 - 7

怎么证明半截弓形曲线大于半截折线呢？如果放大这个图形就会发现，这半截的弓形仍然是一个弓形，而这半截的折线是个直线段，这意味着什么呢？只要我们能证明外边这个直线段长度小于第一次的折线段，将来也可以再用这个定理去证明后续画出的其他折线，这个推理过程可以无限往后推导．明白了这一点，我们想要证明的核心问题就是：折线段的长大于直线段的长．只要证明了这一点，就能得到最终的证明．因此可以把其他线路去掉，只看折线的这部分：直线段和两条折线段共同凑成了一个三角形．两段折线段加起来大于直线段的意思就是说，三角形的两边之和大于第三边，这是我们对这个问题的第二次简化．

现在聚焦到这个问题上，画出任意一个$\triangle ABC$，如图5 - 8所示，AB、AC 两边之和大于第三边BC 吗？既然要求两边之和，我们就把两边之和画出来．在此，我们只需要把左边BA 往上延长到D，延伸出来的长度AD 正好等于右边的长度AC 就可以了．这样的话，我们新作出来的线段BD 就是AB 和AC 两边之和了．那么，BD 大于BC 吗？我们再添上一条线，把右侧的两个点CD 连结起来，这样就形成了一个更大的$\triangle DBC$．

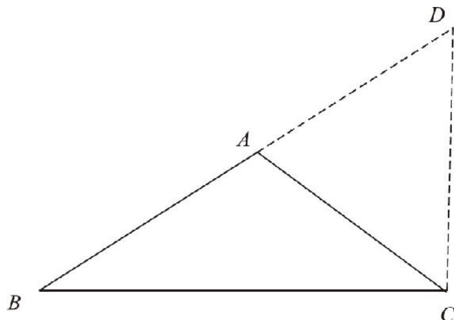


图5 - 8

由于AD 和AC 长度相同，所以右侧的△ACD 就是一个等腰三角形，根据等边对等角的定理，既然$AD = AC$，那它右边这两个底角∠ADC 和∠ACD 肯定是相等的．现在换个角度想想：整个△DBC，它的顶角∠D 就是等腰三角形的一个底角，它左边DB 的总长度等于原来△ABC 两边的和，底边等于原来三角形的底边BC．因此我们原来想要判断的定理，三角形两边之和大于第三边的问题，就转变成了△DBC 的左边DB 是否比底边BC 长的问题了．这样，我们就把一个△ABC 三边的比较，换成了一个△DBC 两边的比较．

那么，△DBC 有什么特点呢？它被分成了两部分，下半部分是原来的△ABC，上半部分是等腰△ACD，在△ACD 中，一个底角∠D 是大三角形的顶角，另一个底角∠ACD 是大三角形∠BCD 的一部分，也就是说∠$BCD = ∠ACD + ∠ACB$．由于等腰三角形底角相等，∠$D = ∠ACD$，所以∠$BCD = ∠D + ∠ACB$．也就是说，在△DCB 中，顶角∠D 小于右侧的底角∠BCD．我们需要证明的问题是DB 的长度大于BC 的长度，但现在我们无法知道这两条边的具体长短，只能知道DB 对着的∠BCD 大于BC 对着的∠D．因此，我们只要知道“在一个三角形内，大角对着的边比较大，小角对着的边比较小”就可以了．于是，我们的第三次简化完成．

现在需要证明的是：三角形内，大角对大边！是不是这样呢？让我们重新画一张图（如图5 - 9）来讨论，在△ABC 中，已知$AB > AC$，求证：AB 对着的∠C 大于AC 对着的∠B．关于三角形的边角关系，我们只知道等边对等角这一个道理，因此，要想对不相等的边角作比较，我们只能在内部先作出一个一样的条件来才可以．因为左边AB 比较大，

所以我们就可以从顶点开始用圆规在左边AB 上截出一段线段AD 来，让它和三角形的右边AC 长度是相等的，然后连结CD ，这样就形成一个等腰三角形——$\triangle ADC$ ，不过这个等腰三角形是尖朝上的，因为我们截的边AD 和AC 相等，所以它的两个底角$\angle ADC$ 和$\angle ACD$ 肯定就是相等的．这个图形一出来，我们就看到原来的三角形右底角$\angle C$ 被一分为二了，上半部分$\angle ACD$ 是等腰三角形的一个底角，下半部分还剩了一个小角$\angle DCB$ ，我们要把它们和原来的$\angle B$ 对比，就看看它们之间是否存在可比的等量关系．根据图示，我们发现等腰三角形的底角$\angle ADC$ 正好是$\triangle DBC$ 的一个外角，根据外角等于不相邻的两个内角和，于是我们就知道$\angle ADC = \angle B + \angle DCB$ ．等量关系都找好了，我们就可以把证明过程完整地梳理出来了．

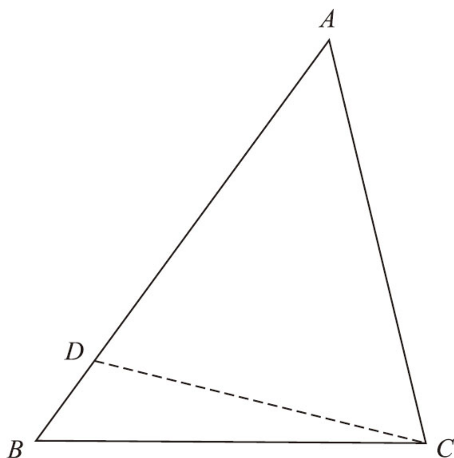


图5－9

在$\triangle ABC$ 中，

$\because AB > AC$ ，$\therefore$可在AB 上截取一点D 使得$AD = AC$ ，而后连结CD ．

$\because AD = AC$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$ ．

$\because \angle ADC = \angle B + \angle DCB$（三角形外角定理），

又$\because \angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle ADC + \angle DCB$（等量代换）

$= \angle B + \angle DCB + \angle DCB$（等量代换），

$\therefore \angle ACB > \angle B$（整体大于部分）．

于是，我们得到了结论：在一个三角形内，大边对大角．

我们得到最终结论了吗？还没有，因为需要证明的结论是大角对大边，刚才的结论是大边对大角．那么我们能否通过大边对大角证明一下大角对大边呢？可以！我们可以假设大角不对大边，那大角对着的是什么边？只有两种可能，一种情况是大角和小角对着的边相等，另一种情况是大角对着的边反而小．先看第一种可能，大角和小角对着的边相等，这有可能吗？不可能，因为我们学过等角对等边的定理．大角对着的边反而小是不可能的，因为我们刚刚证明的就是大边对大角，两种可能性都没有，所以，结果只能是大角对大边．于是我们又通过反证法得出了正确结论：同一三角形中，大角对大边．

经过三次简化以后，我们得到这么多定理，现在可以翻回去证明我们该证的东西了：在三角形中，因为大边对大角，所以大角对大边；因为大角对大边，所以三角形两边之和大于第三边；因为两边之和大于第三边，所以折线段的总长大于直线段的，又因为曲线内部可以不断地作出折线来，所以曲线的长度大于折线段的，折线段的长度大于直线段的．所以我们得出了最终结论：两点之间，直线段的距离最短．

通过对一个定理的追问，一连串追问，问出四个定理．一个如此浅显的道理，居然也是可以证明的，而且它的证明过程居然如此复杂．如果你理解了这个过程的奇妙，你也就理解了为什么有那么多数学家会痴迷于简单的数学猜想的证明．那是因为，在这些证明的背后，隐藏着一个全新的不为人知的世界，过去我们曾经因为不断追问小数减去大数等于多少，发现了负数；因为不断追问根号2等于多少，我们发现了无理数；在高中阶段，我们还会因为追问负数的平方根是多少，发现虚数和向量．数学就是在这些不断追问、不断求索中不断发展的，人类文明也就因此不断进取、不断前行．

◎ 三角形全等，该怎么证明

数学最精美、最奇妙的地方，就在于通过复杂的过程去证明看似简单的道理．因此需要抛出一个看似简单的问题，吸引你一起往下探索，这样才能够见证数学的奇妙．接下来，我们就再一次见证一个几何学的奇迹，那就是三角形的稳定性．

三角形的稳定性，也是我们在小学阶段学过的内容．我们当初是以这种方式理解的：如果我们把四根棍子头尾相接地钉在一起，这样就形成了一个四边形，可是这个四边形一点都不结实，如果我们左右摇动它，它就扭来扭去地乱晃，感觉就和陈旧的桌椅差不多．如果我们在这个四边形的斜对角再钉上一根木棍，这个四边形立刻就不会乱动了．（如图5 - 10所示）在实际生活中，我们也会通过这种办法来挽救那些快散架的桌椅，那么，这又是基于什么原理呢？

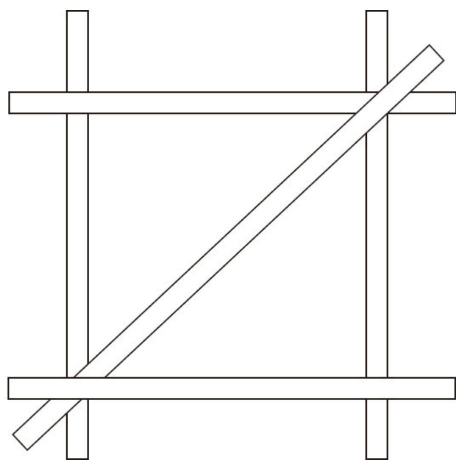


图5 - 10

三角形的稳定性问题，本质上是一个什么问题呢？假设我给了你三根棍子，你把它们首尾相接地钉在一起（如图5 - 11所示），为什么它就不能随便摇晃了呢？那是因为，把这三根棍子首尾相接，只能钉出这一个形状来．是不是这个道理呢？我们可以再对比一下四根木棍的情况：如果你用的是四根棍子，你就可以钉出长方形、平行四边形等无数个样式来，因为四边形的角度没有固定住，所以在棍子长度不变的条件

下，这个四边形的四个角就随便拧．但如果给定了一个三角形的三条边，那么它的三个角也就随之固定下来了．因为三边固定，三个角也就固定了，于是我们也可以说，三边对应相等的两个三角形全等．在上述过程中，我们仍然只是通过模拟的方式对此做出解释说明．那么，这个定理成立吗？我们又该怎么证明它呢？

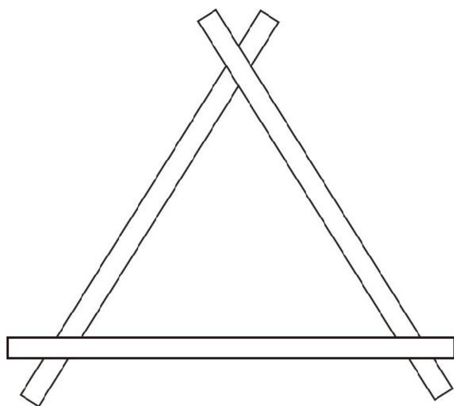


图5－11

这个证明过程，仍然需要用到反证法．假设有两个三角形$\triangle ABC$ 和$\triangle A'BC$，三边都是对应相等的，三个角不相等．为了判断这种情况到底是不是存在，我们可以先把它们两个的一条边BC 对齐，发现除了BC 这条边之外，其他的几个元素都没有重合，出现俩顶点A 和A'．由于三条边都是对应相等的，则$AB=A'B$，$AC=A'C$，因为A 和A' 不重合，可以把它们连接起来．（如图5－12所示）证明如下：

$\because AB=A'B$，

$\therefore \angle BAA'=\angle BA'A$（等边对等角）．

同理，$\because AC=A'C$，

$\therefore \angle CAA'=\angle CA'A$（等边对等角）．

$\because \angle BAA'$ 被AC 分为两部分，

$\therefore \angle BAA'=\angle BAC+\angle CAA'$，

$\therefore \angle BAA'>\angle CAA'$（整体大于部分），

$\therefore \angle BAA'>\angle CA'A$（等量代换）．

但是，$\angle CA'A$ 同样被分为两部分，

$\therefore \angle CA'A=\angle BA'C+\angle BA'A$，

$\therefore \angle BAA' < \angle CA'A$（整体大于部分）．

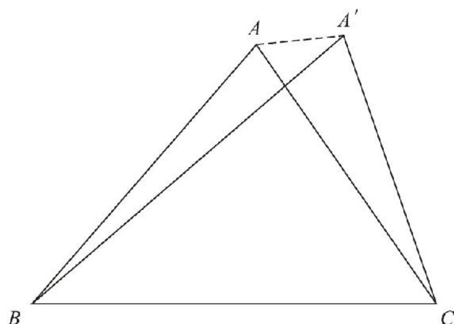


图5－12

由于在上文中证明过$\angle BAA' > \angle CA'A$，发生了矛盾，所以我们的假设是错误的，也就是说：如果三角形三边相等，则在底边重合的条件下，顶点A和A'只要在同一侧，那么一定是重合的．既然是相互覆盖，证明两个三角形全等．三边对应相等，两个三角形全等的这个定理，简称“边边边”，在英文中，边的单词Side开头字母是S，角的单词Angle开头字母是A，所以这个定理又简称SSS，而与之相对的两边夹角的定理就叫SAS．三边对应相等是三角形全等的又一个重要定理，懂得了这个定理以后，古埃及人分地再也用不着牛皮了，原来他们用绳子圈一个四边形的土地，肯定是不靠谱的，因为四边形的角度无法固定，但是，如果用3根绳子圈一个三角形，那它的面积可就一定是相等的了．不仅如此，他们还学会了利用三边相等的关系，画出一个直角．这又是怎么回事呢？

六　尺规作图

◎ 摆脱牛皮的束缚，自由平分土地：中垂线

假设现在有块土地需要平分，我们找到了土地的一条边，现在需要在某一点上作出一条垂线，那么在手里只有细绳的条件下，我们应该怎么做呢？我们需要做的是确定角度，但是我们手里只有绳子，绳子只能确定长度，通过长度又怎么能确定角度呢？由于我们学习了三角形三边相等的全等定理，如果让三个固定长度的边围成一个三角形，就得到了固定的角度．假如这条线我们已经画出来了，那么它既然是垂线，左右两边的角度就都等于90°．这就是我们解决问题的思路，在需要90°的地方，作出两个全等的三角形来．

怎么构造呢？把土地上现成的一条边利用上，这两个三角形如果作出来，肯定是直角三角形，而且是背对背地坐在这条边上挨在一起的，那么它们背对背地这么一贴，中间的线肯定对应相等，中间的角又都是90°，只要底边也相等，这两个三角形就全等了！而且，这两个三角形背对背地一贴，就拼出了一个大的等腰三角形．可问题是，需要我们求的中间这条线，现在还没有，我们可以顺着这个思路寻找解决办法．

为了拼出一个大的等腰三角形来，可以先把这个大三角形的腰和底确定下来，通过给定的长度去画三角形，就能得到一样的结果．如果我们先以土地的分割点为中心，随便取一个长度，按照这个长度在这个土地的边上，在它的左右比量出一样长的两端来，做上两个标记，这就是等腰三角形底下的两个顶点；然后我们随意给定一对腰长，只要再弄一根长一点的线，把这个线中间一对折，就得到两条相等的腰了．我们捏住了中间的位置，把这个折线，往土地上一放，让这段绳子的两头分别和我们刚才找的那两个点对齐了，再把这根线抻直了，就构造出一个等腰三角形．把等腰三角形的顶点和底边中点一连线，这个线就垂直于底边．这是为什么呢？因为它左右两边这两个三角形，符合三边对应相等的条件：左右两条腰是相等的，下边的两个底也是相等的，中间又是一

条公用边．三边都对应相等，所以它们肯定全等，因为全等，所以中间的角就相等；这两个角相加又等于180°，所以它们就都是直角．

如果把用绳子作垂线的方法挪到纸上去，就叫作尺规作图．尺规作图和绳子作垂线的原理是一样的，只不过具体的操作方法有点差别．比如，拿着绳子对折一下，就找到中点了，可是圆规和尺子不能折断，那怎么办？我们可以先把圆规的针脚扎到要作垂线的点上，然后以此为圆心画个圈，这个圈会和刚才的直线产生两个交点，这两个交点到中点的距离自然也就是等于半径的，于是我们就在要作垂线的这条直线上找到了两个点，如图6－1所示．

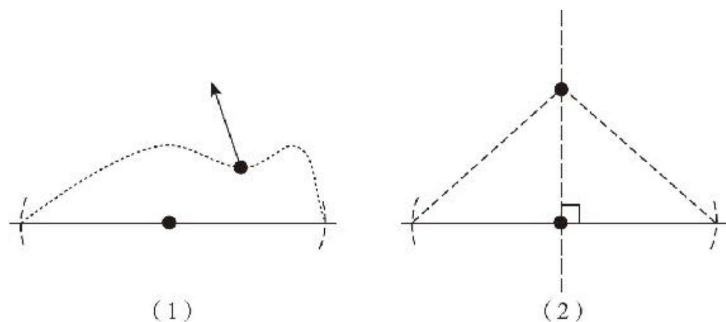


图6－1

这两个点就是我们要作的等腰三角形的两个底角的点，接下来，我们需要画等腰三角形的腰了，画腰时我们需要先把这个半径定得长一些，把圆规叉开的角度大一点，以这个长度为腰长．然后把圆规的针脚扎在左边这个底角的点上，保持腰长不变，在直线的上半部分，先画出一个圆弧来．显然，弧线上所有的点到左边底角的距离都等于我们用圆规叉开的腰长．

然后，我们再把这个圆规的针脚挪到右边的点上来，再画出同样大小的一个圆弧，这个圆弧上的所有点到右底角的距离肯定也等于腰长．这两个圆弧画出来以后，就又产生了一个交点（见图6－3），因为这个交点同时在两条弧线上，所以它到两个底角的距离，应该都等于同一个半径．最后我们连接这个交点和线段中点，就得到了原来直线的垂线，这就是通过尺规作图画已知直线的垂线的方法，背后的原理就是三角形三边相等的判定定理．

总结一下，过直线上一点作已知直线的垂线时，先以任意长为半径，过已知的垂足点作一个圆，这个圆与已知直线交于两点，然后分别以两个交点为中心，以更大的任意腰长为半径画弧（如图6－2所示），最后连接两条弧线的交点和直线上的已知点（如图6－3所示），就得到了所求的垂线．

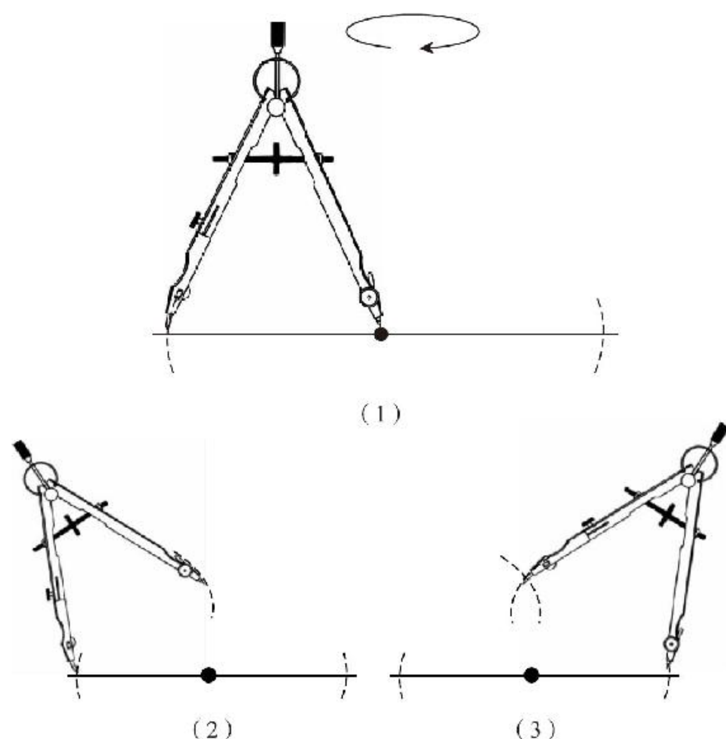


图6－2

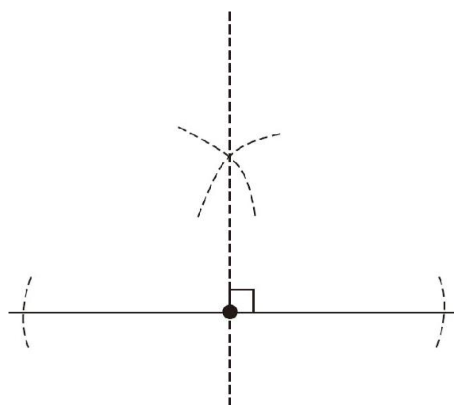


图6－3

掌握了作垂线的办法以后，希腊人终于摆脱了牛皮的束缚，可以自由地平分土地了．可是在前文中我们也提到了，大多数土地并不是方方正正的，如果已知角不是直角，能不能通过绳子作出一个大小一样的角呢？

◎ 几何图形和加减乘除的关系

在实际生活中，大多数土地都不是方方正正的，那么，当我们面对一个任意角的时候，又能否利用绳子或尺规作出一个同样大小的角呢？

首先我们拿一截绳子，任意设定一个长度作为腰长，而后顺着已知角的两边分别比对一下，在这两条边上留下两个记号点，这样就得到了两条相等的边；再拿着绳子比画一下，量一下这两点之间的距离是多少，并把这个距离叫作底长．如果需要在另一个地方画出这个角来，我们就用已知的腰长和底长重新作出这个三角形来就可以了．具体的操作办法是：

先按住绳子的一头，然后以腰长为半径画出一段圆弧，使这个圆弧和已知直线产生一个交点．而后再把这个绳子挪过来，以右边这个交点为中心，以底长为半径再画个圆，这两个圆就产生了一个新的交点．把这个交点和已知的端点一连，该直线和已知直线之间的夹角，就是我们要求的角．为什么呢？因为这两个三角形都是等腰三角形，而且它们的腰长、底长全部都对应相等，凑齐了三边对应相等的条件，所以这两个三角形自然就是全等的了．这就是作一个角等于已知角的办法，接下来，我们把上述过程通过标准的尺规作图的方式描述一遍．

如图6 - 4所示，已知$\angle C$和一条射线OA，要求过O点作一条射线OB，使$\angle AOB=\angle C$．

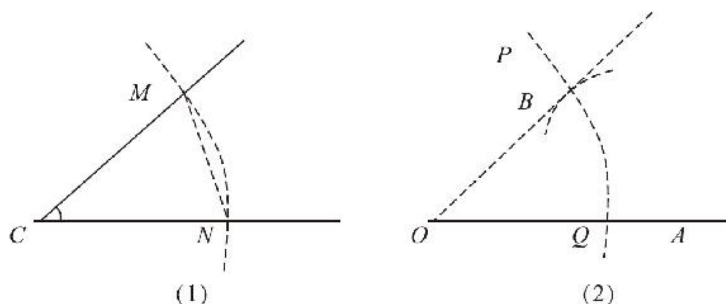


图6 - 4

作图过程如下：

第一步，以C点为圆心，任意长为半径画圆弧，圆弧分别

和$\angle C$的两边相交于点M、N，圆弧上的点到圆心距离相等，所以$MC=NC$［如图6－4（1）所示］．

第二步，以O点为圆心，MC长为半径画弧线PQ，弧线和射线OA相交于Q点，因此，$OQ=CN$．

第三步，量取MN长度为半径后，以Q点为圆心画圆，且交PQ于B点，可知$BQ=MN$，由于B点同时在弧线PQ上，因此又有$BO=OQ=CN=CM$．

第四步，用直尺连结OB后，$\angle AOB$即为所求．

证明过程如下：

在$\triangle MCN$和$\triangle BOQ$中，由作图过程可知：

$OB=CM$，

$OQ=CN$，

$BQ=MN$，

$\therefore \triangle MCN \cong \triangle BOQ$（三边相等判定定理），

$\therefore \angle BOQ=\angle MCN$，即$\angle AOB=\angle C$．

通过上述过程我们发现，尺规作图的确很厉害，在不知道具体角度，且没有任何测量工具帮助的情况下，却能作直角，甚至能作出任意角．那么，还有哪些尺规作图能做的事情呢？其实，几何学里面的尺规作图就相当于是代数学里的加减乘除，凡是通过加减乘除能够实现的，利用尺规作图的方式全部都可以实现．那么，几何图形和加减乘除有什么关系呢？

请仔细想一下：两条线段的长度是不是可以加在一起呀？两个角的角度是不是可以相减呢？一条线段的长度是否可以放大3倍呀？一个已知角是否可以一分为二呢？所有这些，全部都是可以的！无论是长度、角度还是面积、体积，全部都可以加减乘除．否则几何学怎么能属于数学呢？虽然我们不知道线段的具体长度，也不知道角的具体大小，可是，我们仍然可以实现加减乘除．不过在具体作图前，我们先要弄明白一个问题，我们为什么能做加减乘除呢？

其实，我们之所以能够做加减乘除，全部源于我们能够作相等的图形，我们在几何课一开始的时候，就演示了怎么作一条线段等于已知线段，现在呢，我们又学了怎么作一个新的角等于已知的角．相等能作

了，加减法还会远吗？如果让我们作一条线段的长度等于另外两条线段的长，应该如何实现呢？这并不难，因为我们已经知道其中任意的一条线段的作法了，因此我们只要先画一条射线，再用圆规叉开了量一下已知线段的长度，然后回到这条射线比量一下，不就可以把已知线段的长度移动到这条射线上来了吗？完整的作图过程如下：（如图6 - 5所示）

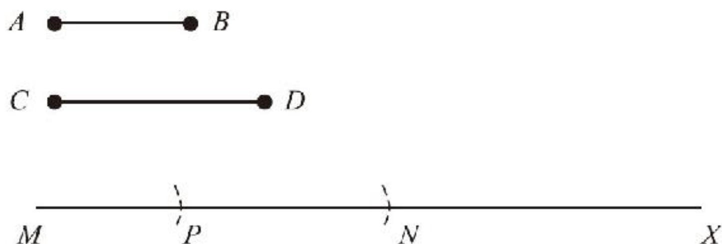


图6 - 5

已知线段AB、CD，求一条线段MN，使$MN = AB + CD$.

第一步，作射线MX；

第二步，以M点为圆心，AB长为半径画弧，弧线交MX于点P；

第三步，以P点为圆心，CD长为半径画弧，弧线交PX于点N，线段MN即为所求.

如果我们要求两条已知线段相减呢？只需要先画出长线段，而后再在长线段内部截取出一条线段等于短线段，两条线段一截取，剩下的那段就是所求的差．由于此过程非常简单，就不再详细描述了．

线段的加减法很简单，角度的加减法也并不复杂．由于我们已经掌握了画一个角等于已知角的方法，因此要画一个角等于两个已知角的和，就只需要先画出一个角来，然后再以新画出来的角的一条边为起始边，在这个边的后面，继续把另一个角画出来就可以了．当我们画完挨在一起的两个角之后，两个角的和也就自然显示出来了．同样，如果我们要求两角之差，只需要先把大角画出来，然后在大角的内部画一个小角，两角之差就得到了．

我们都知道，乘法是连续的加法，因此知道了加法怎么做，乘法也就不难了：如果让你画一条线段等于3倍的已知线段，那你就在后边多

续上两次不就行了吗？如果让你画一个角等于已知角的2倍，你也就挨着它再画个同样的角．不过，如果让你画8倍长度的线段，你就不必连续加7次了，你可以先画出2倍长度的线段，再用这2倍长度的线段为基础翻个倍，这样就得到了4倍长度的线段，再继续翻1倍，直接得到8倍长度的线段了．

◎ 角平分线

几何学也属于数学，因为它也是离不开加减乘除的．即使我们不知道具体的长度角度，但照样不影响实现加减乘除．通过前面的讨论，我们明白了加减法和乘法，但除法又该怎么办呢？比如，我给你一个线段，让你平分成两半；我给你一个角，让你把它的角平分线画出来．该怎么画呢？

我们要明确一点，在尺规作图的时候，无论要实现的具体内容是什么，都要依据三角形三边对应相等的全等定理．因为这种尺子是没有刻度的，要想分出相等的东西来就必须用图形全等的方式来求；同时，我们还没有量角器，不知道具体角度，因此要想让角度相等，也只能转换为边相等才能实现，因为我们手里的直尺和圆规只能确定长度，不能确定角度．无论是画垂线、画已知角、平分线段还是平分一个角，都只能用三边相等的全等定理，其他定理虽然有很多，但是在尺规作图的问题上都帮不上忙．只要理解了这一点，具体的操作方式就很容易了，下面我们先研究一下角平分线的作法：

题目：给定一个任意大小的角$\angle O$，求作一条射线OM平分$\angle O$．通过前面的分析我们已经知道，作图能借用的只有三边相等的定理．我们假设OM这条射线已经作出来了（如图6－6所示），由于OM已经平分了$\angle O$，所以在我们可以利用的两个全等三角形中，被OM平分的两个角一定是全等三角形的一组对应角，而OM本身一定是两个三角形的公用边．为了凑全等三角形三边对应相等的条件，我们不妨假设$\angle O$的两条边上有两点A、B，且$OA=OB$．现在我们已经凑足了两组对边相等，继续连结MA和MB以后，我们发现：要想让$\triangle OAM$和$\triangle OBM$全等，必须保障$AM=BM$．而两条边长度相等，同样可以靠圆规帮忙实现．通过上述分析，我们就得到了平分任意角的操作步骤．

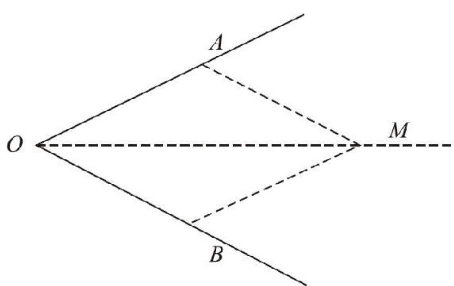


图6 - 6

已知$\angle O$，求作$\angle O$的平分线OM．作法如下：（如图6 - 7所示）

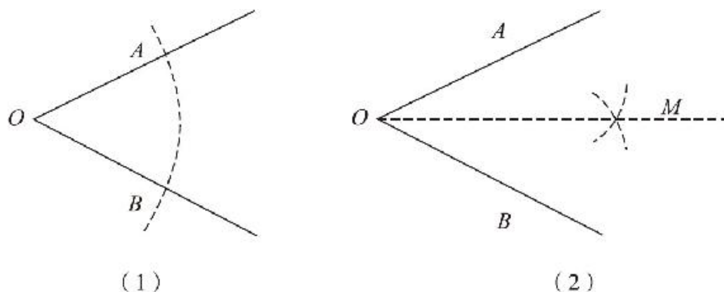


图6 - 7

第一步，以O为圆心，任意长为半径画弧，且交$\angle O$的两条边于A、B两点，这样就保障了$OA = OB$．

第二步，分别以A和B为圆心，以OA长为半径画弧线，两条弧线相交于M点，于是也就保障了$AM = BM$，最后连结OM，OM即为所求．

为什么通过这种方法就能保障OM平分$\angle AOB$呢？因为在$\triangle AOM$和$\triangle BOM$中：$OA = OB$，$OM = OM$，$AM = BM$，三边对应相等，所以$\triangle AOM \cong \triangle BOM$，因此$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2}\angle AOB$．以上就是利用三边相等的全等定理作角平分线的方法．接下来，我们继续研究寻找线段中点的办法．

如图6 - 8所示：已知线段AB，在线段AB上找一点M，使$MA = MB$．通过刚才的讨论，我们知道，要想平分一条线段，也只能借助三角形三边相等的全等定理．按照这个思路，我们可以继续往下分析，假设中点M点已经作出来了，则有$MA = MB$，我们现在想利用三角形全

等定理，则MA 和MB 一定是两个全等三角形的一组对应边，相对于其中一个三角形而言，我们已经找到两个顶点了，只需要再找到一个顶点就可以了，假设这个顶点是在AB 上方的N 点，那么，当我们分别连结AN 、MN 和BN 以后就会发现，MN 是两个三角形的公用边，又因为$MA = MB$ ，因此要想让两个三角形全等，必须使得$NA = NB$ ．到此，我们终于明白了，我们要做的，是一条等腰三角形的中线，由于中线也是顶角的角平分线，因此，我们就得出了正确的作图方法：（如图6 - 9所示）

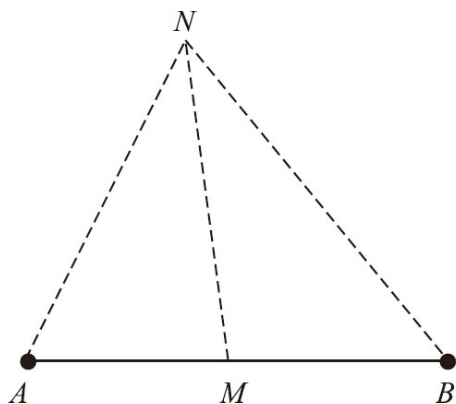


图6 - 8

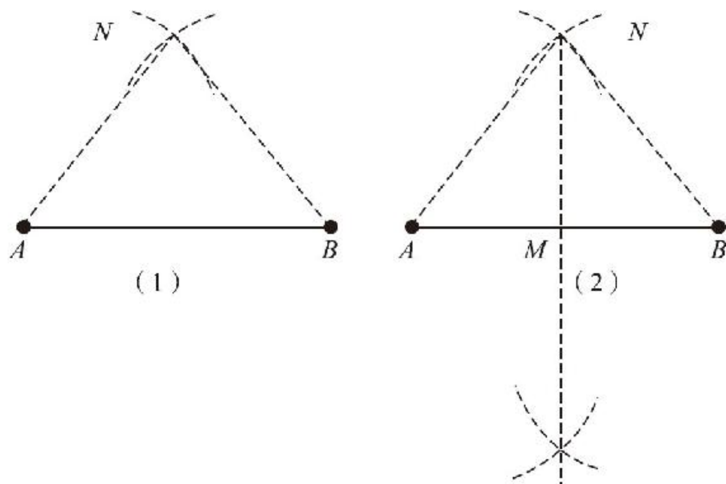


图6 - 9

第一步，分别以A 、B 为圆心，以大于AB 一半长度为半径画弧，两弧线交于N 点，分别连结NA 和NB ．

第二步，作$\angle ANB$ 的角平分线NM ，且交AB 于M 点，M

点即为所求．

需要说明的是，在作$\angle ANB$的角平分线时，由于AN和BN已经是相等的两条线段了，所以，无须在$\angle ANB$的两条边上重新寻找两个点，只需要分别以A点和B点为圆心，以AN长为半径画弧线即可．那么，由于圆规在画弧线的半径确定后，一直就没有发生过任何变化，所以，我们其实可以更简单地把步骤简化为：分别以A、B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$长为半径画圆，两圆相交于两个交点C、D，而后连结C、D，交AB于M点，M点即为所求．在作图过程中，我们不难发现，其实M不仅是AB的中点，还是一个垂足，因此，该方法作出的直线CD也是已知线段AB的中垂线．

对比一下角平分线和中垂线的作法，我们不难发现：尺规作图的方法都是大同小异的，无论是角的平分线还是线段的垂直平分线，都是通过三角形全等定理来实现的．下面，我们继续通过这个定理研究一下平行线的作法．

已知直线AB和AB上方一点C，过点C求作一条直线CD，使得$CD \parallel AB$．我们知道，平行线的定义都是靠同旁内角互补来实现的，判定定理又几乎全部都与角度有关，所以我们要想作出平行线，也只能通过角度的帮助．但我们还知道，靠直尺和圆规根本无法直接测量角度，因此又只能利用三边相等的全等定理来保障角的相等，懂得了这两点，基本也就没什么可选的方案了．首先我们必须过点C作一条直线CM，而且不出意外的话，这条直线一定会和AB有交点，假设这个交点就是M．（为什么一定会有交点呢？如果没交点的话，那不就是一条平行线了吗？）而有了交点就会产生一个角，那么，假设我们作出平行线CD，CD自然也会与CM形成夹角，如果两直线平行，这两个夹角就是同位角关系，一定会相等．（如图6 - 10）所以，只要过C点作一个角，使得这个角的大小等于CM和AB的夹角就可以了．下面就是完整的作图过程：（如图6 - 11所示）

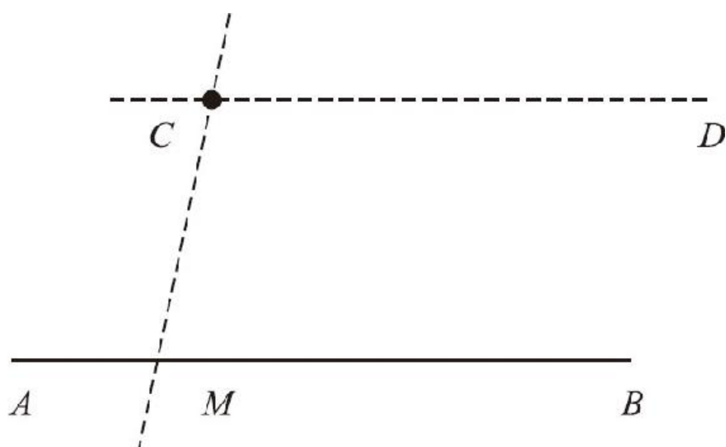


图6 - 10

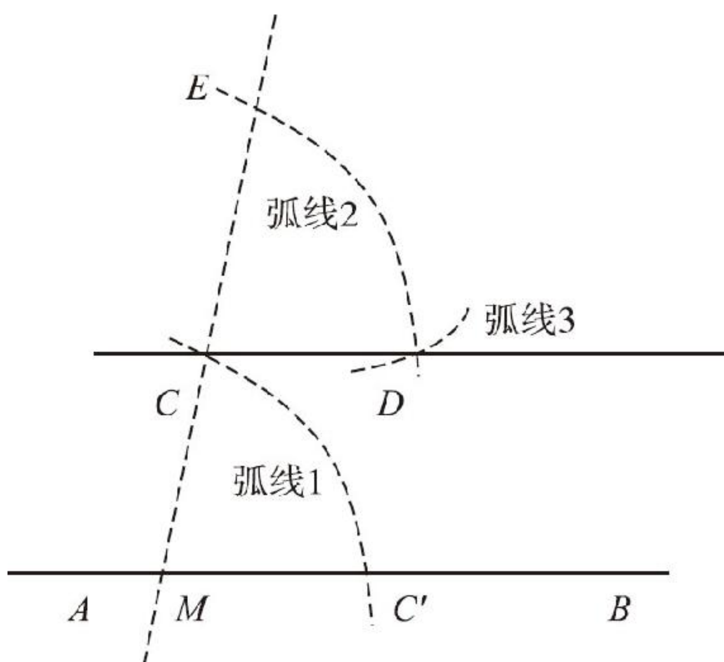


图6 - 11

第一步，过C 作直线CM 交AB 于点M ；再以点M 为圆心，CM 长为半径作弧线1，且交AB 于点C' ，这里实际上是作出了一个等腰三角形CMC' ，接下去就要根据三边对应相等的定理，在C 点附近复制出一个与此全等的三角形；

第二步，以C 为圆心，CM 长为半径画弧线2，且交MC 延长线于E 点，这个操作就保障了$EC = CM$ ；

第三步，以E 点为圆心，CC' 长为半径画弧线3，且交弧线

2于D 点，由于D 点在弧线2上，所以它到C 的距离$DC = CM = C'M$ ，由于点D 又在以E 点为圆心的弧线3上，所以$ED = CC'$ ，$\triangle EDC$ 和$\triangle CC'M$ 的三条边都是对应相等的，因此必然全等．此时只需连结并延长CD ，直线CD 即为所求．

◎ 用尺规作图解决生活中的问题

所谓的尺规作图，不过就是数学里边的加减乘除而已，无论是作垂线、平行线，还是对一个角作平分，都是利用三角形三边对应相等的这个判定定理．那么，关于尺规作图还有哪些规律呢？

不知你发现没有，我们在前面的作图过程中，大部分时间都只是在找点．

作一条垂线的时候，一开始只有一个垂足点，由于两点才能确定一条直线，因此要想把垂线作出来，就还需要另一个点才能确定这条垂线．于是我们就从垂足点出发，通过画弧线的方式，在直线上找到两个对称点，然后再以这两个交点为圆心，画出两个大圆，通过大圆的交点才找到了垂线上的另一点．作角平分线也是如此，一开始只有角的顶点这一个点，我们仍然是通过圆弧在这个角的两边上找到交点，然后再分别从两个交点出发画圆弧，通过圆弧的交点找到了另一个点．

其他作图问题也都是如此，我们必须得找到点，因为找不到新的点，就没法连线，没法作圆．但是，我们在一张空空如也的白纸上，怎么去找那个未知的点呢？只能通过线去找点，可是一条线上有无数个点，那怎么办？可以通过两条线来帮忙，无论是两条直线还是弧线，只要我们确定了两条线，很快就能找到它们的交点．尺规作图在生活中有什么用处吗？尺规作图的方法又告诉我们哪些道理呢？

当生活中一个具体的问题摆在面前的时候，为什么我们会感到迷茫呢？只要按照道理办不就可以了吗？为什么我们会犹豫不决呢？那是因为，我们只按照一个道理办事，条件不充分．前面说过，一个道理就是一条线，一条线上有无数个点，要想确定一件事怎么做，必须找到两个以上的道理才能确定．

接下来我们就处理这样一个生活中的问题：在一个地点的附近有三个村子，现在我们要为这三个村子的村民打上一口井，为了公平起见，需要让这口井到三个村的距离一样远．请问，我们如何确定这口井的具体位置呢？显然，这就是在一张白纸上找一个点的问题，这个点找不到

怎么办，是不是就可以借助两条线来帮忙呢？可是，我们连线都找不到，现在这张白纸上，只有代表三个村子位置的三个孤零零的点，怎么办？我们可以从已知条件里头，先把这两条线找出来．一下子找不到距离三个村子同样远的点不要紧，可以先找距离其中的两个村子同样远的一条线．接下来我们就来试着找一找：

我们可以在一张白纸上描三个固定的点代表三个村子，然后任意选出其中的两个点来，再随意找出一个到这两个点距离相等的点．距离相等是很容易操作的，我们知道，圆规画出的圆弧到圆心的距离就是永远相等的，于是我们可以把圆规叉开，以一个固定的长度为半径，然后分别以两个村为圆心，用这个半径画上两段圆弧，使这两段圆弧产生一个交点，那么这个交点到两个村的距离正好等于刚才我们用圆规叉好的半径．［如图6－12（1）所示］

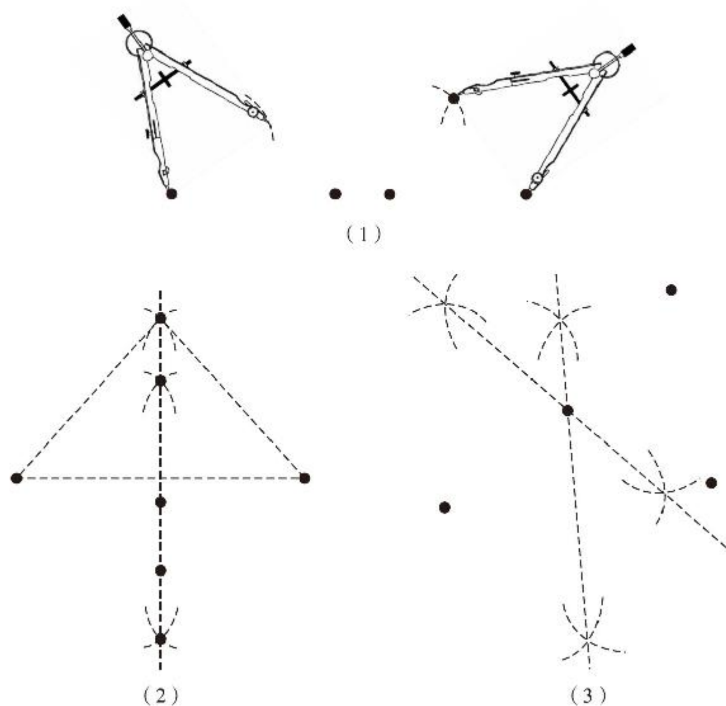


图6－12

这个过程就等同于在通过两个道理确定一件事情怎么做：由于半径没有变化，所以第一段圆弧上所有的点到第一个圆心的距离等于半径；同理，第二段圆弧上所有的点到第二个圆心的距离也等于同一个半径，

而中间的交点既存在于第一段圆弧上，又存在于第二段圆弧上，因此它到两个圆心的距离，肯定也等于同一个半径了．也就是说，一件事儿要办得靠谱，就应该既符合第一个道理的要求，又符合第二个道理的要求．不是要找一条线吗？可是我们现在只是找到了一个点．没关系，因为我们的半径是随意给定的，只要我们按照这种方式多作几个点，就会发现与两个村子距离相等的那些点全部存在于一条直线上，这条直线就是两点之间线段的垂直平分线．那这又是为什么呢？

很简单，因为如果我们把垂直平分线上的任何一点和这两个村子一连，马上就会形成两个全等的三角形，为什么这两个三角形全等呢？因为既然这两个村子之间的连线被垂直平分了，就有两个直角对应相等，两条直角边对应相等，同时这两个三角形背靠背紧挨在一起，它们之间有一条公共边，于是就符合了边角边判定定理的条件，因此这两个直角三角形一定是全等的．垂直平分线上的任何一点到线段两个端点的距离相等，这就是线段垂直平分线的性质定理．［如图6－12（2）所示］现在，我们终于从一张白纸上找到一条线了，在寻找一条线的过程中，发现的是一条新的定理．同样，当我们在繁杂的生活事务中理出头绪的时候，就发现了一种做人做事新的道理．

现在我们知道，只要把井打在两个村子之间的垂直平分线的任何一点上，不管这一点有多么遥远，它到两个村子的距离都是相等的．接下来我们就考虑第三个村子的问题：既然我们发现了垂直平分线的性质定理，那么就可以依靠它的帮助来确定另一条线了．我们只需要从先前的两个村子里随便选出一个点来，和第三个村配成一对儿，然后把这两个村的垂直平分线也作出来就可以了．这条新的垂直平分线上的任何一点到第二个和第三个村的距离肯定也相等的，既然已经有两条垂直平分线，它们肯定就会产生一个交点，因为这个交点属于第一条垂直平分线，所以它到第一个村子和第二个村子的距离相等；又因为这个点也在第二条垂直平分线上，所以它到第三个村子的距离也等于到第二个村子的距离，因此，它到三个村子的距离就肯定是相等的了．（如图6－12（3）所示）

以上，我们用尺规作图法解决了一个生活中的问题．我们知道，到两个点距离相等的点都在这两点之间线段的垂直平分线上；到三个点距

离相等的点又在两条垂直平分线的交点上．其实我们真正要关注的内容，不仅仅是垂直平分线的性质定理，不仅仅是尺规作图的这些具体方法，而是隐藏在具体方法背后的思维方式：当我们处理代数问题的时候，一个道理就可以写出一个方程，两个道理就可以联合成为一个方程组；对方程组求解后，得到的答案就可以同时满足两个道理的要求．同理，当我们通过几何的方式来解决问题时，一个道理对应的就是一条线，这条线上所有的点都符合这个道理的要求；另一个道理对应的是另一条线，当我们把这两条线都画在同一个平面上的时候，自然就会产生交点．交点一确定下来，两个条件就都得到满足，一个事情该怎么做，也就有了确定性的结果．

在尺规作图中，除了全等三角形三边对应相等这个最基本的定理之外，常用的还有四个常用的定理：第一，到一个点的距离不变的所有点都集中在一个圆上；第二，到两个点的距离相等的点在这两点之间线段的垂直平分线上；第三，到一条线距离不变的点在这条线的平行线上；第四，到两条线距离相等的点在这两线夹角的角平分线上．那么，我们最后提到的这两个定理为什么成立呢？

七　任意土地的平分

◎ 平行线间的距离和任意形状的面积问题

这里，对两个重要的定理进行证明：第一，平行线间的距离处处相等；第二，角平分线上的点到角的两边距离相等．

首先，什么是点到直线的距离？所谓点到直线的距离，就是指直线外一点到直线上所有的点的距离中最短的那个，而距离最短的就是点到直线的垂线段的长度．那么，为什么垂线段最短呢？下面我们就一起来分析．

如图7－1所示，我们先从直线AB 外一点C 画一条已知直线的垂线CD ，然后我们再连结C 和直线上任意一点E ，这样就出现了一条斜线CE ．从图7－1中可以看到，斜线CE 对着的角，就是那个垂足D 所在的直角$\angle CDE$ ，而垂线段CD 对着的角$\angle CED$ 却是一个锐角，根据大角对大边的道理，肯定是直角对着的斜线CE 更长，锐角对着的垂线CD 稍短．所以我们就用垂线段的长度来表示点到直线的距离．

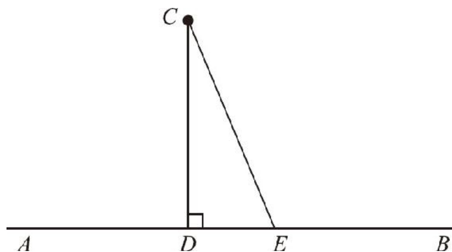


图7－1

什么是两条直线之间的距离？首先我们知道，两条直线之间的关系分为相交和平行两种情况：如果两条直线相交，两者之间的距离就是不确定的，在交点附近距离近，越是远离交点，两线之间的距离越远，所以这种情况下，讲距离没有意义．那么，平行线之间距离是处处相等的吗？

我们不妨尝试一下，在两条平行线之间任意选定两个位置，画上两条垂线（如图7－2所示），由于同旁内角互补，因此在垂线和平行线之

间就形成了一个四个角都是直角的长方形，长方形的长和宽是对应相等的，于是我们就可以知道平行线间的距离处处相等了．但这只是我们的直觉而已，仍然需要逻辑严谨的证明：为什么长方形的长宽是对应相等的？这个问题看似简单，实则非常复杂．

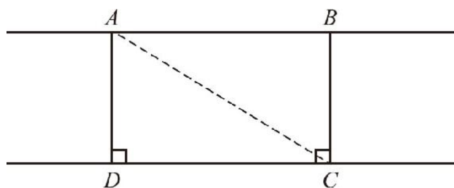


图7－2

在已知的条件之中，找不到任何两条线段是相等的，我们只知道一对平行线和两条垂线，除此之外一无所知．根据这些已知条件，我们能够推导出哪些结论？

$\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore \angle DAB = 180° - \angle ADC$（两直线平行，同旁内角互补）．

又$\because AD \perp DC$，$\angle ADC = 90°$（已知），

$\therefore \angle DAB = 180° - 90° = 90°$（等量代换）．

同理，由$BC \perp DC$，可得

$\angle ABC = \angle BCD = 90°$，

$\because \angle ADC = \angle BCD = 90°$（已知），

$\therefore AD \parallel BC$，

$\therefore$ 四边形$ABCD$为矩形（两组对边平行，四个角都是直角）．

我们需要证明$AD = BC$，但是已知条件中并没有任何线段相等的条件，因此只能构造出两个含有公共边的三角形，利用三角形全等来证明边的相等，因此我们不妨连结AC（如图7－2所示），于是形成了两个直角三角形$\triangle BAC$和$\triangle DCA$．

$\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$（两直线平行，内错角相等）．

$\because AD \parallel BC$（已证），

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$（两直线平行，内错角相等）．

现在，在$\triangle BAC$和$\triangle DCA$中，已经拥有了三组条件：$\angle BAC=\angle DCA$，$AC=CA$（公共边），$\angle BCA=\angle DAC$.

三角形的两个角以及这两角的夹边都对应相等，那么这两个三角形是否全等呢？接下来我们可以通过反证法来证明它：

假设AD不等于BC，那么，我们就可以在AD或者其延长线上截取AE，使得$AE=BC$，当点E在AD内时（如图7-3所示），在$\triangle AEC$和$\triangle CBA$中：

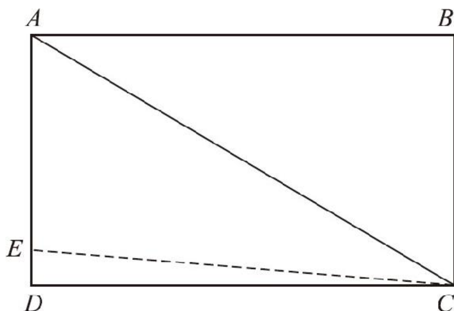


图7-3

$$\begin{cases} AE=CB（假设）, \\ \angle EAC=\angle BCA（前文已证）, \\ AC=CA（公共边）, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CBA$（边角边全等定理），

$\therefore \angle ACE=\angle CAB$（全等三角形的对应角相等）.

又$\because \angle ACD=\angle CAB$（前文已证），

$\therefore \angle ACE=\angle ACD$（等量代换）.

然而，由图7-3可知：$\angle ACE=\angle ACD-\angle ECD$，

$\therefore \angle ACE<\angle ACD$（整体大于部分）.

该结论和$\angle ACE=\angle ACD$发生了矛盾，当点E在AD延长线上时，同理可证矛盾，所以我们的假设$AD\neq BC$是错误的，$\therefore AD=BC$.

通过上述证明过程，我们得到了两个结论：第一，平行线之间的距离处处相等；第二，两角及其夹边对应相等的两个三角形全等，该定理是三角形全等的最后一个重要的判定定理，简称“角边角”或ASA.

掌握了角边角定理后，我们还很容易得到一个推论：只要两个三角

形有两个角对应相等，一条对应边对应相等，这两个三角形就是全等的．因为三角形只有三个角，而且这三角相加等于180°，如果有任意两个角都对应相等了，那第三对角自然也就相等了，因此，只要知道任何两个角对应相等了，就等于知道所有角都对应相等了，在这种情况下，随便再有一组对应边相等，就可以证明两个三角形全等了，这个推论又叫“角角边”，简称AAS．

截至目前，三角形全等的判定定理一共有四个，分别是三边对应相等（SSS）、边角边（SAS）、角边角（ASA）、角角边（AAS）．那么，怎么样才能快速掌握这么多定理呢？很简单，首先我们要知道，要证明三角形全等至少要有一组对边相等，如果没边只有角是绝对不行的，然后我们再找其他的条件，除了边边角这个条件不行之外，其他条件只要凑齐了三个，全等就一定没问题了．如果记不住怎么样行，我们就记住怎么样不行．怎么样不行呢？没有边不行，边边角也不行．除此之外，只要凑足三个条件，全都可以证明．

接下来我们就讨论角平分线的问题．角平分线上的点到角的两边的距离相等，用的就是角角边的定理．如图7 - 4所示，在上下两个三角形中：角平分线是一条公共边，被角平分线分开的两个角是一组对应角，同时角平分线上的点到两边的距离是两条垂线，因此两个直角也是对应相等的，于是，我们就凑齐了角角边的条件，也就知道上下两个三角形全等了，所以角平分线上的点到角的两边距离相等．

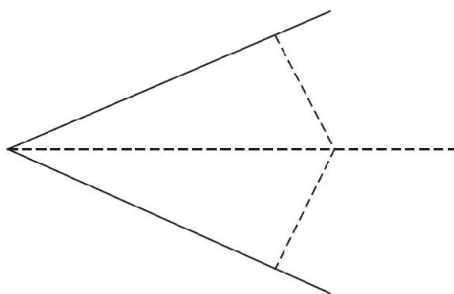


图7 - 4

平行线之间的距离处处相等的定理，可以帮我们处理任意形状的面积问题．

◎ 面积定理：掌握世界上所有图形的变换方法

在前文中，我们提到了三角形全等的最后一个判定定理角边角，而且我们还知道了平行线之间的距离不变．那么，这个定理又能提供给我们哪些帮助呢？我们又是证全等，又是尺规作图，研究了这么久，却仍然只能证明两个全等的图形面积相等．如果是不一样的图形，我们怎么知道它们的面积是不是相等呢？接下来我们就来讨论这个问题．

我们在小学阶段就曾经学过，平行四边形的面积等于底乘以高，三角形的面积等于底乘高除以2．那么，只要我们证明了平行线之间的距离不变，就可以知道，夹在两条平行线之间的任意形状的平行四边形，高度都是相同的，因此只要它们的底边相同，面积也就是相等的．同理，三角形的面积是平行四边形的一半，平行四边形面积不变，三角形的面积当然也是不变的．不过，通过底乘高计算面积的方式，那是小学数学的方式，而几何学是没有数字的数学．所以，要通过标准的逻辑推理来证明，夹在两条平行线之间的同底的平行四边形为什么面积相等．就是要在不知道平行四边形的面积是多少，甚至不知道平行四边形的面积公式怎么计算的情况下，证明它们的面积是相等的，这也恰好就是几何学的魅力所在．

如图7－5所示，AB 和DE 是两条相互平行的直线，而四边形$ABCD$和$ABEF$ 就是夹在这两条平行线之间的两个平行四边形，它们有一个共同的底边AB ．现在我们要证明的是：$\square ABCD$ 的面积等于$\square ABEF$ 的面积．如果不能利用底乘高的公式，要证明这个问题，我们就必须要回归到面积的本质：

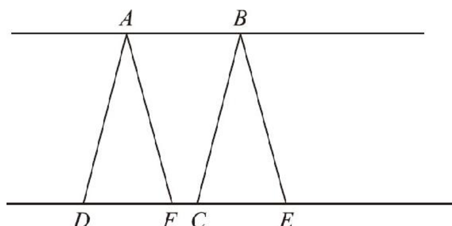


图7－5

面积就是图形的大小，我们要证明这两个图形的面积相等，就是证明它们的大小相同，然而，这两个四边形的形状却是不相同的，直接对比得不到结果，我们就只能借助其他图形的帮助．根据《几何原本》的基本公理，我们知道，等量加等量和相等，等量减等量差也相等．那么这两条公理有哪一条是可以利用的呢？我们考虑通过等量减等量的方式去寻找答案，那么这两个四边形可否由同一个形状裁剪出来呢？显然，图示呈现给了我们一个梯形$ABED$，我们在这个梯形中裁剪掉右侧的$\triangle BEC$就可以得到左侧的平行四边形$ABCD$；在梯形中裁剪掉左侧的$\triangle ADF$就可以得到右侧的平行四边形$ABEF$．因此，只要我们证明了被裁减下去的两个三角形$\triangle BEC$和$\triangle ADF$全等，就可以知道这两个平行四边形的面积是相等的．按此思路，得到完整的证明过程如下：

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$AB=DC$（平行四边形的对边相等）．

$\because$四边形$ABEF$是平行四边形，

$\therefore AF=BE$，$AB=EF$（平行四边形的对边相等）．

$\because DC$和EF都等于AB，

$\therefore DC=EF$（等量代换）．

$\because DC=DF+FC$，$FE=FC+CE$（整体等于部分之和），

$\therefore DF=DC-FC=EF-FC=CE$（等式变形）．

在$\triangle ADF$和$\triangle BCE$中：

$$\begin{cases} AD=BC, \\ AF=BE, \\ DF=CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BCE$（三边对应相等）．

$\because S_{\square ABCD}=S_{梯形ABED}-S_{\triangle BCE}$，

$S_{\square ABEF}=S_{梯形ABED}-S_{\triangle ADF}$，

$\therefore S_{\square ABCD}=S_{\square ABEF}$（等量减等量，差相等）．

梯形的面积减去两个全等的三角形面积之后，剩下的平行四边形的面积，一定是相等的．就这样，我们终于找到了一对不全等的图形，面

积也是相等的．而且，还是在我们不知道这两个图形的面积是多少的情况下得到的．

于是我们知道，当一个平行四边形的底边被固定在两条平行线之间后，平行四边形的另外两条侧边就可以在两条平行线之间摆来摆去，无论它的形状怎么变化，无论它扭曲成什么样子，只要高度不变，它的面积也总是保持不变的．在所有平行四边形中，最典型的就是四个角都是直角的矩形．当平行四边形扭转成矩形的时候，它的底边就变成了长方形的长，它的高度就变成了长方形的宽，因此平行四边形的面积才可以通过底乘以高来表示．从而我们知道，靠底乘高来计算平行四边形的面积的方法只是这个定理的一个推论、一个特例而已．

那么，卡在平行线之间的，同底边的三角形面积呢？因为三角形的面积是平行四边形面积的一半，由于平行四边形面积相等，所以呢，三角形的面积也就应该相等了．不过，我们还是有必要解释一下，为什么三角形的面积等于平行四边形面积的一半．

由于平行四边形的两组对边相等，如果在平行四边形内增加一条对角线［如图7－6（1）所示］，就可以看到：平行四边形被分割成了两个三角形，在这两个三角形中：外边的两条边对应相等，中间又是一个公共边，由于三组对边分别相等，所以这两个三角形必然全等，因此三角形的面积当然就是平行四边形面积的一半了．

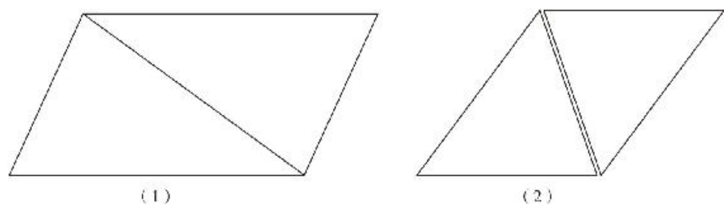


图7－6

同样，如果我们从一个三角形出发，也可以作出一个面积增大了一倍的平行四边形，当一个三角形尖朝上放置时，我们只要把这个三角形复制一遍再倒转180°，尖朝下和这个三角形拼在一起，就可以完美地拼成一个平行四边形．［如图7－6（2）所示］因此，我们可以知道，三角形的面积当然就是平行四边形面积的一半了．卡在两个平行线之间的

同底边的三角形面积相等．

那么，明白了等底等高的三角形面积不变之后，又会给我们哪些帮助呢？古埃及的土地形状又不是都是等底等高的．实际上，一旦我们懂得了三角形面积变换的方法，就掌握了世界上所有图形的变换方法，通过这个方法，我们不仅可以把平行四边形变成矩形，我们还可以把梯形变成平行四边形，把任意四边形变成梯形，把任意的多边形变成四边形．这就意味着，我们就可以在保持面积不变的条件下，进行任意形状的图形变换，那么，这个变换过程具体又该怎么操作呢？

◎ 保持面积相等的转换规律：角边角判定定理

世界上的所有事物，都在不同之中蕴含着相同的哲理，都在变化之中蕴含着不变的规律．数字的加减乘除是如此，几何的图形变换也是如此．当我们理解了同底等高的三角形面积不变以后，我们就可以进行更加复杂的图形变换，接下来我们就研究一个梯形如何变换为平行四边形．

如图7－7所示，现有任意一个梯形$ABCD$，其中$AB\parallel CD$，现在需要我们把它转变为一个等面积的平行四边形．下面我们先来分析一下：首先，梯形和平行四边形的唯一区别在于，梯形只有一组对边平行，它的两条腰AD和BC是不平行的，而平行四边形的两组对边都互相平行，因此要想把它变为平行四边形，就需要我们把它的其中一条腰扭转一下，扭转到和另一条腰平行的状态，那么我从什么位置执行扭转的动作呢？由于梯形的下底DC比较长，因此我们若从B点作一条和AD平行的直线，就能产生一个平行四边形，但是这样就会把梯形的右下角砍掉一个三角形，这样一来，剩下的面积就和梯形的面积不相等了，同样，如果我们从下边的C点作一条平行线，也就会在它的右上角多出一个三角形来，同样不满足要求．

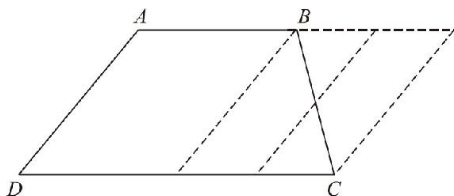
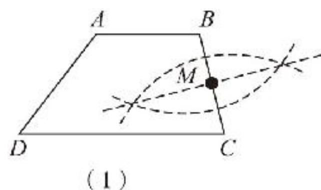


图7－7

上下两个顶点都不行，因此，我们就只能从BC的正中心作一条AD的平行线，这样一来，梯形的右上角多出了一个小三角形，右下角又减去了一个小三角形，这两个小三角形又是一对全等三角形，它们的面积又是相同的，因此，这个四边形的面积就是在梯形的基础上，分别加减了同一个面积的结果，所以，它的面积就等于梯形的面积了．以下是具体的操作步骤：（如图7－8所示）



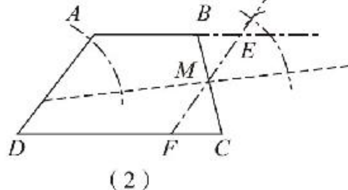


图7－8

第一步，作BC的垂直平分线，交BC于点M；

第二步，过点M作AD的平行线EF，交AB的延长线于点E，交CD于点F．平行四边形$AEFD$即为所求．

以下给出简要证明过程：

在△CMF和△BME中：

$$\begin{cases}\angle CMF=\angle BME\text{（对顶角相等），}\\ MB=MC\text{（中垂线的性质），}\\ \angle MBE=\angle MCF\text{（两直线平行，内错角相等），}\end{cases}$$

$\therefore \triangle CMF\cong\triangle BME$（角边角定理）．

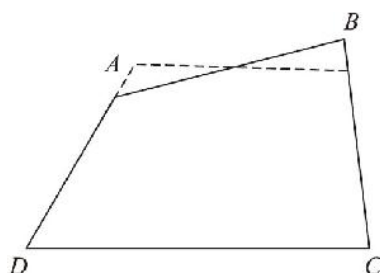
$\because S_{\square AEFD}=S_{梯形ABCD}-S_{\triangle CMF}+S_{\triangle BMC}$，

$\therefore S_{\square AEFD}=S_{梯形ABCD}$．

以上就是把梯形转变成等面积平行四边形的转换方法．通过这种方法，我们就可以比较任意梯形和平行四边形的面积大小；同时由于我们掌握了平行四边形和矩形的转换方法，因此只要再经过一次变换，就把任何一个梯形转换为等面积的长方形．那么如果土地的形状不是梯形，而是一个四边都不平行不相等的任意四边形呢？接下来，我们就把一个任意形状的四边形转变为等面积的梯形．

如图7－9所示，任意四边形$ABCD$　没有任何一组边相互平行，现在，我们需要把这个四边形转变为一个等面积的梯形．由于梯形上下底是平行的，因此，我们只需要把上边AB扭转一下，让它保持和DC平行就可以了．显然，无论是在A　点还是在B　点扭曲，都会导致面积的改变，由于AD和BC并不平行，因此，即使我们想在AB的中点来完成这次扭转，仍然无法得到所需的结果．因此，要想完成这次转换，必须另

辟蹊径．根据前文中学的图形变化的定理我们知道，夹在两条平行线之间的同底的三角形是可以任意变形的．因此，可以尝试利用这个定理来完成这次转换：



注：由于AD和BC不是平行关系，因此即使从AB的中点作平行线，得到的两个三角形的面积仍然不是全等的，因此这种思路是错误的.

图7－9

首先连结AC，通过这条对角线把四边形切分成两个部分，由于要扭转的是上底AB，而这种方法不会影响下面的三角形ADC的面积，就可以保持$\triangle ADC$的部分不变．现在，我们就需要在B点的附近找到一个新的顶点E，该顶点需要满足两个条件：第一，要把原图转换成梯形，因此必须使$AE\parallel DC$；第二，要保障原图形面积不变，因此需要保障新三角形$\triangle AEC$的面积等于原三角形$\triangle ABC$的面积．由于在$\triangle AEC$和$\triangle ABC$中存在公共边AC，因此要想让两个三角形面积相同，必须使AC边上的高相同，而要想保证高相同，就必须让变形后的三角形和原三角形卡在两条平行线之间，即$BE\parallel AC$．通过上述分析，我们理清了思路，于是得到如下的过程：（如图7－10所示）

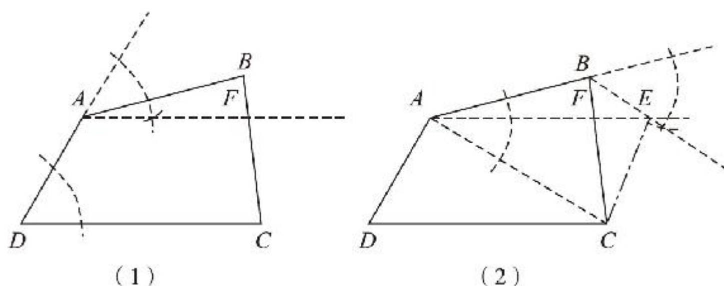


图7－10

第一步，过A点作$AF\parallel DC$．

第二步，连结AC，并过点B作$BE\parallel AC$，交AF于点E，连结CE，梯形$AECD$即为所求．

简要证明过程如下：

∵$BE \parallel AC$，

∴$S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ABC}$（等积三角形变换）．

∵$AE \parallel DC$，

∴四边形$AECD$是梯形．

且由图示不难发现

$S_{梯形AECD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=S_{四边形ABCD}$．

因此，四边形$AECD$即为所求梯形．

最后，我们要完成等面积图形变换的最后一步，把一个任意的多边形的面积转变为四边形，一旦完成了这次转变，就可以对任意多边形的土地面积进行比较了．如何完成这样的转变呢？先把这个多边形盖住一部分，无论这个图形多么复杂，我们只关注其中的三条边，这三条边首尾相接，一共有四个顶点，如果我们把这四个顶点连起来，就变成了一个任意四边形．这个多边形的面积等于我们盖住的部分的面积加上四边形的面积．如果能把这个四边形变成一个等面积的三角形，就等于为多边形减少了一条边，并且保持面积不变．（如图7－11所示）

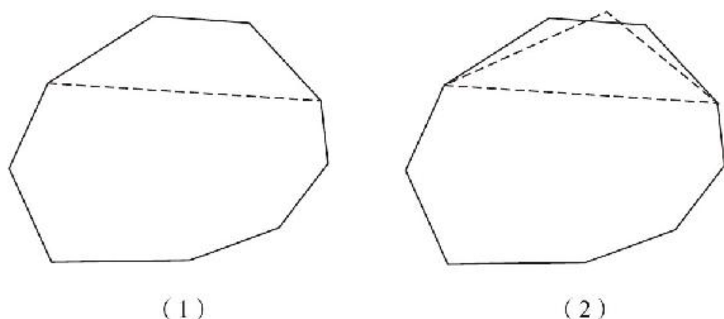


图7－11

经过上述操作，就可以把N边形变为$N-1$边形．因此，无论这个多边形有几条边，都可以在保持面积不变的前提下，通过不断重复上述步骤，把它变成一个任意四边形．当然，还可以把它变成梯形，变成平行四边形，最后变成长方形．整个过程能否顺利实现，就取决于一开始的假设能否成立，也就是说，能否把一个任意四边形，变成一个等面积的三角形．接下来，我们就重点突击这个难题．

如图7－12所示，有一个任意四边形$ABCD$，要求把它转变为一个等面积的三角形．我们可以保持CD不变，只需要在AB的上方找一点E，使$\triangle ECD$的面积等于四边形$ABCD$即可，使用平行线等面积变换的定理就可以完成这一过程：

第一步，连结AD，目的是保持$\triangle ACD$的面积不变；过B点作AD的平行线BF，在BF和AD这两条平行线之间，作出一个$\triangle AED$，使$\triangle AED$的面积和$\triangle ABD$相等．

第二步，延长CA，使CA和BF产生一个交点E，最后连结ED，$\triangle ECD$即为所求．

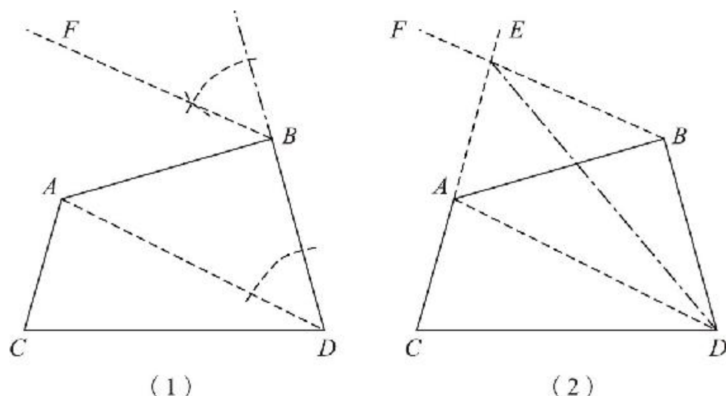


图7－12

证明过程如下：

$\because BF \parallel AD$（作图所得），

$\therefore S_{\triangle AED}=S_{\triangle ABD}$（夹在平行线内的同底等高的三角形面积不变），

$\therefore S_{\triangle CED}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle CAD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CAD}=S_{\text{四边形}ABCD}$，

$\therefore \triangle ECD$即为所求．

掌握了四边形变成三角形的方法，就等于掌握了为多边形减去一条边的方法．当我们遇到任意多边形的时候，可以先选取它的一小部分，找到三条紧邻边，把它们连接成一个四边形，再把这个四边形通过刚才的方法变换成三角形，这样多边形就减去了一条边，不断重复这种做法，就可以陆续把多边形变成四边形．然后依次把它变成梯形、平行四

边形和矩形．这就意味着所有的多边形都能变成矩形，于是，所有图形的面积也就具备了可比性．我们终于在千变万化的几何图形中，找到了保持面积相等的转换规律．而所有这一切，全部来源于同底等高的三角形面积不变，又是全部来源于三角形的角边角判定定理．

边边边定理教会了我们尺规作图的加减乘除，角边角定理教会了我们保持面积不变，于是我们知道，天下图形皆出于三角形．在学习中，也会学到平行四边形、长方形、正方形和菱形的性质定理及判定定理，但实际上，只要你轻松驾驭了三角形的判定定理，四边形的定理全部可以举一反三地去理解，轻而易举地运用．

八　几何证明的思路

◎ 双向思考：任何一种固定的解题思路都是靠不住的

初中数学的难点主要有两个：一个是代数中的因式分解；另一个就是几何中的证明．原因很简单，这两类问题都没有一个固定的解题思路，只能利用“发散思维”来解决．所谓发散思维就是不能“一条道走到黑”，必须多方面、多角度去尝试，最后指不定通过哪条路线能解决问题．而与之相对的另一种思维方式就叫线性思维．能用线性思维解决的问题都有相对固定的套路．

比如我们在解方程的时候，不管它是二元一次方程，还是一元二次方程，不管题目多么复杂，都可以按照移项、合并同类项、消除系数、套用公式这些步骤，即使你采用了一条道走到黑的方法，也能解决．线性思维不一定就是走直线，偶尔也会拐个弯，但是基本没有别的岔道口可走，只要顺着路线拐过去就行了，就像在铁路或者高速公路上行驶一样，只要顺着道走下去，一定不会跑偏．

可是几何证明不行，你走不了多远，就得退回来看看，判断一下是否能够通过其他方法解决，试了一下不行，就再接着返回去，走得更远一点．没错，几何证明题就有这个特点，任何一种固定的解题思路都是靠不住的，解决所有的几何证明题都只能依靠发散的思维．了解了几何证明题的这种特点，我们就应该知道，解决所有证明题没有什么特殊的高招，根本方法还是：不断试错、不断修正、笔耕不辍、其解自得．必须不停笔地反复在纸上推演计算，不断地列出条件，不断地推导证明，不断地试错，不断地修正．但是，几何的定理那么多，题目的条件又那么复杂，应该从哪儿下手呢？解决几何证明题有两种基本思路：正向思维和逆向思维．

正向思维，就是根据题目给出的条件和我们头脑中的相关定理，逐步推导出最终结论，如果一次推导不出来，那就继续往下推导；逆向思维，就是先看结论，分析一下要想满足这个结论需要用到什么定理，需

要凑齐哪些条件，然后结合题意继续追问，这些条件又需要哪些其他条件才能满足．当几何题比较复杂的时候，常常需要把这两种思路结合起来，正向推导不行，就逆向推导试试，两边凑一凑，条件就越凑越多，什么时候凑齐了，这题目也就证明出来了．这就像挖山体隧道一样，在一座大山的两侧一起开工，什么时候接上头了，什么时候就算通了．不过，如果你的两条思路没碰上头，都把山体给挖通了，那也没关系，并且我就要恭喜你，终于学会一题多解了．

正向思维和逆向思维要求我们，必须把所有的知识点通过各种不同的方式进行归纳总结．比如，三角形全等的判定方法有多少，必须有“边角边”“角边角”“角角边”和“边边边”．证明一个角等于另一个角有几种证明方法？如果只能回答出来三角形全等，就忘了平行线也能证明，等腰三角形的“三线合一”也能证明．要想快速解决几何问题，就必须经常把这些定理翻来覆去地用，不但要知道给你什么条件能证明什么结论，还应该知道，想要证明什么结论可能用到哪些定理．

如图8 - 1所示，有一个普通的三角形ABC，已知其中的两条边$AC > AB$，M 是BC 的中点．求证：顶点A 附近的两个角$\angle CAM < \angle BAM$．

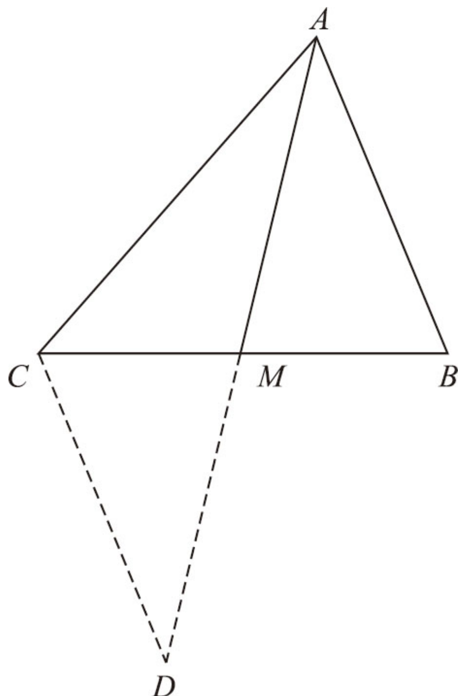


图8 - 1

首先尝试一下正向的推导：大三角形被分成了两个小三角形，这两个小三角形的底边相等，中间的公共边也相等，但是，左右的两条边不相等，所以想证明全等那是不可能了．题目指出$AC>AB$，根据大边对大角不难得出：$\angle B>\angle C$．但是题目没让我们比较这两个角的大小，要比较的是上头那两个小角的大小．正向思维走不通了，应该试试逆向思维．

想要比较两个角的大小，有哪些定理呢？大边对大角可以，但是这两个角只能位于一个三角形内才可以，我们比较的是两个三角形的顶角，用不上这个定理．除此之外，还可以使用整体大于局部的公理，如果角和角之间有加减关系也可以比较它们的大小．比如，在大角的内部，我要是能裁剪出一个角等于那个小角，就能证明它更大．但是很遗憾，由于其他角度也不相同，我们没法儿作出一个全等三角形来．于是还只能返回去，再仔细研究一下第一种思路．

既然大边对大角要求这两个角在同一个三角形里，能不能考虑一下某个角，把这两个角移动到一个三角形里去呢？现在两个三角形的底边

不是相等吗，我们就可以在这个底边的底下接出一个三角形来，让它和其中一个三角形全等！于是我们就得到了完整的证明过程：

首先，延长AM至D，使得$MD=AM$，连结CD，于是，在$\triangle AMB$和$\triangle DMC$中：

$$\begin{cases} MB=MC\text{（已知）}, \\ \angle CMD=\angle BMA\text{（对顶角相等）}, \\ MD=MA\text{（作图所得）}, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMB \cong \triangle DMC$（边角边定理），

$\therefore CD=AB$，$\angle MDC=\angle MAB$（全等三角形的对应也相等，对应角相等）.

$\because AC>AB$（已知），

$\therefore AC>CD$（等量代换），

$\therefore \angle MDC>\angle CAM$（大边对大角）.

又$\because \angle MAB=\angle MDC$（已证），

$\therefore \angle MAB>\angle CAM$（等量代换）.

以上，我们结合了顺逆两种思维方式，证明了这道题目．在解题过程中，我们还用到了辅助线的帮助．那么几何证明题还有哪些点要注意呢？

◎ 动态看图：迅速找到核心内容

在此介绍一下几何证明的第二个要点：动态看图．所谓动态看图，有两层含义：

第一是避免机械地、静态地看图，避免发生误会．我们知道，几乎所有的几何证明题都要依赖于图形，图形可以让我们直观地看到题目中的条件．同时，看图的时候，也容易发生误会．

什么样的误会呢？比如有两个角明明在已知条件中是不相等的，可是因为图形中两者相差很小，做题时就很容易发生误会，把两个角相等当作一个已知条件去用．其他条件也是类似的：两边的长度容易看错，两条直线垂直、平行也容易看错，甚至两个三角形全等也很容易看错．如何解决这类问题呢？必须多画几张图．

几何学研究的是没有数字的数学．绝大多数证明题都可以画出无数张图来，比如：题目让你证明三角形的内角和等于180°，你画一个什么模样的三角形都可以，第一次画个锐角三角形，第二次就画个直角三角形．如果一个题目很复杂，常常要画十几张图才能解决，因为我还得经常在图上勾勾画画：两个角相等需要做标记，两边相等也需要做标记，还会时不时地增加两条辅助线，很快一张图变得乱七八糟了，此时只要再画一张就可以了．而且，为了避免发生误会，我们在画每一张图的时候，最好和上一张有所区别，无论是长度还是角度，稍微改变一点，效果就不同了．解题思路往往在画图的过程中就找到了．这是因为，虽然我们画的每张图都不同，但是在其中总是有相同的东西，当我们回顾这些内容的时候，往往就会捕捉到那些最有价值的相同点，最终的解题思路就找到了．

对于第一层意思，还可以用另一种方式来解释——我们可以用运动的观点去看图．虽然几何图形本身是静态的，但是我们要知道，图形中哪些部分是可以活动的，哪些地方是不能动的，这样的思维方式相当于把图形上的点和线，想象成了钉在一起的棍子，如果棍子的长度可以变化，还可以把它想象成橡皮筋．如果在头脑中能把静态的图转变成动态

图，就能迅速捕捉到隐藏在变化中的静止不变的核心内容．这就是动态看图的第一层意思．

动态看图的第二层意思是，要把图形中相等的部分或者全等的部分，想象成动态运动的结果．由第一公理可知：相互覆盖的两个图形全等．从这个公理出发，不妨这样理解：两个全等的图形就是一个东西被挪到了另一个位置．比如：平行线里的同位角，就可以看作是其中一个角沿着一条直线平移到另一个地方去的结果，小学的时候就是通过平移三角板的方式来画平行线的．同时，两个对顶角也可以理解为是原来的角在顶点不变的条件下，旋转了180°得到的．在等腰三角形中，可以把垂线、中线、角平分线三线合一的结果，当作等腰三角形的一个对称轴，将它的一半翻转180°，就可以得到另一半．以上这些方法，就是动态看图的第二层含义．（如图8－2所示）

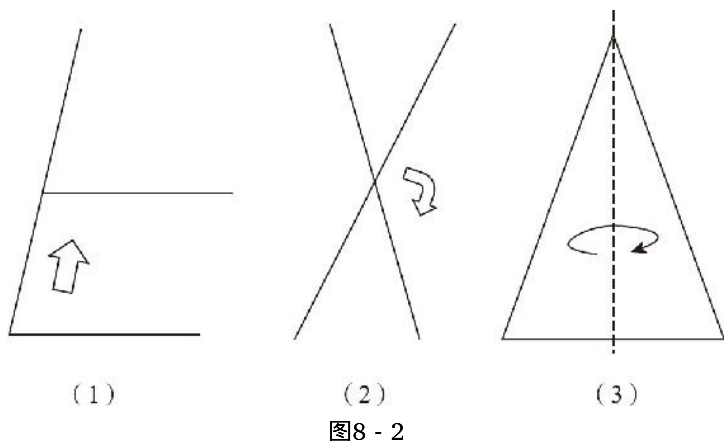


图8－2

如果我们看到的几何图形符合平移、旋转和翻转的关系，就可以认为这两个图形全等．不过要注意一点，这种方式只是为了帮助我们快速理解问题、寻找思路．在几何学里并没有所谓的“平移定理”“对称定理”和“旋转定理”，即使通过这种方式发现了三角形全等，仍然需要用三角形的那几条定理去证明，只不过通过动态看图的方式，可以快速发现图形关系．

接下来，我们继续分析一个证明题：如图8－3所示，在梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，AE平分$\angle DAB$，DE平分$\angle ADC$，且AE、DE的交点E恰好处于BC上，求证：$AD=AB+DC$．

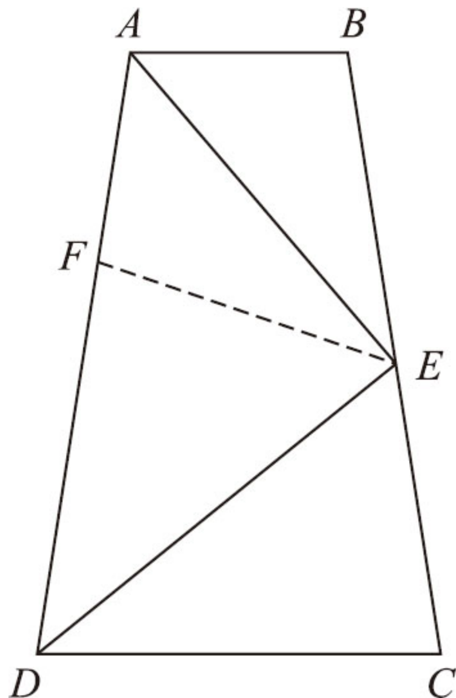


图8 - 3

如果你在纸面上画出这张图来，就会发现，这个过程并不容易：要想让左边这两个角的平分线相交以后，交点正好在右边的腰上，相当复杂．我们在画图的时候，不能先画好了梯形，再去作角平分线，而应该先把左边的部分全部画好了，两条角平分线也画出来了，最后再经过角平分线的交点，去画出右边的那条腰．当然，右边的腰画歪点没关系，只要它经过平分线的交点就是符合题意的．为什么要讨论画图的过程呢？因为这就是在动态看图．在这个图中，梯形上下底平行是必须的，角平分线是必须的，其他的元素则可以见机行事．

一看见角平分线，我们就应该产生让图形运动起来的想法了．怎么运动呢？翻转！既然是角被平分了，那么我们把它翻转过来，肯定是可以重合的，于是我们就可以在平分线的另一侧，作出一个全等的图形来，具体的证明过程如下：

在AD 上截取一点F ，使$AF = AB$ （这样我们就找到了B 的一个对称点），连结EF ，在$\triangle AFE$ 和$\triangle ABE$ 中：

$$\begin{cases} AF=AB\text{（作图所得）}, \\ \angle EAF=\angle EAB\text{（角平分线的定义）}, \\ AE=AE\text{（公共边）}, \end{cases}$$

∴$\triangle AFE\cong\triangle ABE$（边角边），

∴$\angle AFE=\angle B$（全等三角形的对应角相等）．

∵$AB\parallel CD$（已知），

∴$\angle B+\angle C=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补），

∴$\angle C=180^\circ-\angle B=180^\circ-\angle AFE$，

又∵$\angle DFE=180^\circ-\angle AFE$，

∴$\angle DFE=\angle C$．

在$\triangle DEF$和$\triangle DEC$中：

$$\begin{cases} \angle EDC=\angle EDF\text{（角平分线的定义）}, \\ ED=ED\text{（公共边）}, \\ \angle DFE=\angle DCE, \end{cases}$$

∴$\triangle DEF\cong\triangle DEC$（角边角），

∴$DF=DC$（全等三角形的对应边相等），

∴$AD=AF+DF=AB+DC$（等量代换）．

九　图形缩放

◎ 相似定理，你必须知道这三点

任何一个几何图形在经过了平移、旋转和翻转以后，图形的位置角度都会发生变化，但是最终得到的仍会是和原来的图形全等的图形．除了这些变换之外，日常生活中常见的还有另一类变换——图形的缩放．

平时在手机上看照片的时候是不是经常要放大缩小呢？开车看导航的时候是不是也得进行缩放呢？更重要的是，当我们决定动手做个东西的时候，往往也需要先在纸上做出一个小样来，试验成功了以后，才能用实际材料把它放大了做出来．所有这些都是在利用图形缩放的相关知识．图形缩放是我们最常用的几何知识，当我们把一个图形放大或者缩小了以后，它的大小就发生了改变，但它的形状却仍然保持不变．在几何学上，我们把大小不同、形状相同的两个图形叫作相似图形．

相似图形最基本的性质是，两个图形所有的对应角的大小相等，所有的对应边的长度成比例．最典型的例子就是：地图上的街道和实际的街道是相似的，因而每个地图都会有一个统一的比例尺．如果想要知道两地之间的实际距离，只需要拿着刻度尺测量一下地图上两点间的距离，然后乘以缩小的比例，最后得到的就是两地之间的真实距离．机械和建筑的设计图也是类似的道理，设计图上的所有尺寸和实际物体的真实尺寸之间总会保持一个稳定的比例．

是不是只要两个图形对应角相等，它们的对应边就一定成比例呢？不对！以长方形和正方形为例，它们的所有角度都是90°，应该说都是对应相等的，但是长方形长和宽的比例与正方形边长的比例，就不是对应成比例的．必须要研究一下，如何判断两个图形是否相似．

把两个相似的三角形叠放到一起，看看会出现什么现象．如图9－1所示：我们把大三角形ABC和小三角形$AB'C'$放到了一起，其中$\angle A$是重合的，由于边长不相等，所以底边BC和$B'C'$肯定是不重合的．

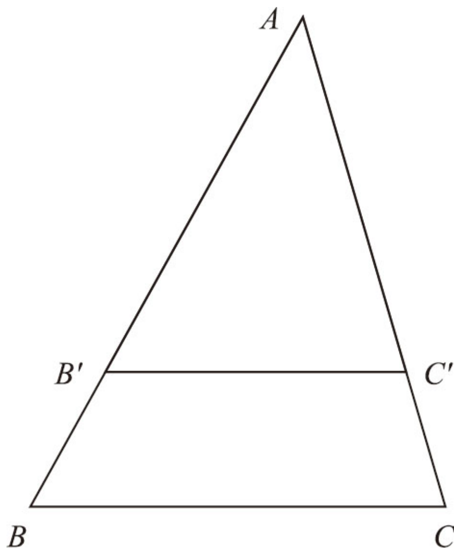


图9 - 1

因为这两个三角形是相似的，所以它们的三个角都是对应相等的，即$\angle A = \angle A$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$．由于$\angle B$和$\angle B'$是同位角的关系，所以我们不难发现，两个三角形的底边BC和$B'C'$是平行的关系．而且由于两个三角形相似，我们还可以知道，它们的对应边是成比例的，也就是$AB:AB' = AC:AC' = BC:BC'$．

也就是说，经过中间的一组平行线分割，得到的左右两边的线段对应成比例．切出的三角形也是相似三角形．这就是相似图形的一个最重要的定理，线段被平行线所截以后，对应边成比例．不过上述过程并不是一个严格的证明．这个相似图形里头的学问，大部分还不在于定理证明，而在于它在实际生活中的运用．除了地图和设计图之外，在实际生活中，更多的是利用相似定理做测量．例如：

面前有几百米长的一条笔直的道路，但是手里只有100米的皮尺，现在我们要测量整个道路的长度，可以采用分段测量然后求和的方法．但是如果不想那么麻烦，还有更简单的办法：从道路的一头垂直地拉着皮尺走出100米，然后站在这儿不动，看一下，道路的另一端在哪个方向？瞄准了那个方向以后，在土地上画上一条直线，这样，就在道路的两个端点及你站的位置之间形成了一个直角三角形．然后，我们只需要再作出一个和它相似的小三角形来，测量一下这个小三角形对应边的尺

寸，然后再按照比例放大就成了．

具体怎么作相似三角形呢？我们知道，两条平行线就能截出两个相似三角形来，可以在测量土地的皮尺这条直线上，作一条和道路平行的直线．具体作法如图9－2所示：假设我们要测量的道路为AC，现在我们引出来的100米的皮尺为AB，现在我们找到AB上距离B点10米远的一点E，过E点作一条AB的垂线EF交BC于点F，由于EF和AC都是垂直于AB的，所以$EF \parallel AC$，因此$\triangle BEF$和$\triangle BAC$就是相似的关系，对应边成比例．即$EF:AC=BE:BA$，由于BE和BA都是已知的，所以我们只需要测量出EF的距离，按比例放大就可以得知AC的长度，假设EF的距离是62.3米，那么：

$$AC=EF\times BA\div BE$$

$$=62.3\times 100\div 10$$

$$=623（米）$$

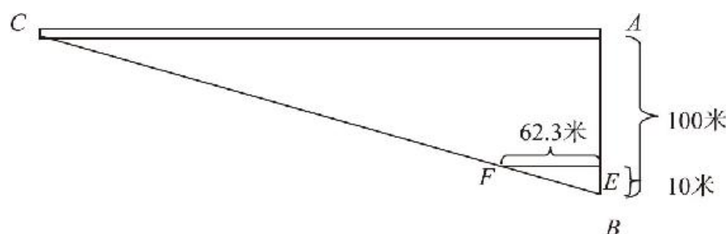


图9－2

目前，该方法仍然是工程测量中的标准方法，只不过在工程师进行实际测量时不需要皮尺，而是用更为先进的激光测距仪．但不管使用什么样的工具，只要物体的实际尺寸没法直接测量，就必须要用相似三角形的原理来推算．利用这个原理还有没有什么更简单的办法，让我们大致估算一下距离呢？在影视节目中，侦察兵偶尔会握紧拳头，伸出一个手指来做距离测绘（如图9－3所示）．他只要用自己的左眼和右眼分别观察一下被测物体，看一下自己拇指落在什么位置上，就能大致地知道目标的远近，这其中利用的也是相似定理．因为，拇指和左右两只眼睛形成了一个三角形；同时，当他用一只眼睛看的时候，这个拇指落在相应的一个位置上，又利用了光沿直线传播的道理，两只眼睛分别看过

去，就等于作了两条光线，于是就在观察者和被测物体之间形成了两个相似三角形．所以，他就可以利用等比例的这种性质，通过自己两眼宽度和拇指对应位置的宽度推算出目标距离．

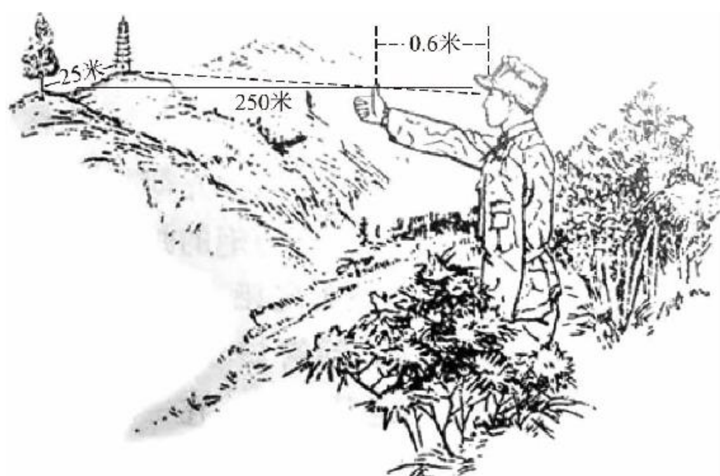


图9 - 3

由于对应边成比例的这种性质，相似图形在实际生活中的运用非常多．在实际运用的时候，需要注意三点：第一，必须借助三角形的帮助；第二，必须借助平行线的帮助；第三，必要时最好借助光线的帮助．

◎ 判断相似三角形的三个条件

对于两个三角形而言，除了被平行线所截之外，还有哪些条件可以判定两个三角形的相似关系呢？

三角形的全等定理有四个，除了两个条件不能判定全等之外，剩下的条件只要凑齐三个就可以了．在被我们排除的两个条件之中，首先就是没有对应边不行，如果只有三个角对应相等，就无法判定两个三角形全等，因为形状一样、大小不一样的图形属于相似图形．三角形相似的第一个判定定理，就是三个角对应相等．接下来，我们再分析一下判断三角形全等的几个条件．

首先是边边边的条件，当两个三角形三边对应相等时，两者之间必然是全等关系．现在我们学了相似图形，只需要把三边相等的条件修改为三条边对应成比例，就可以判断这两个三角形相似了．

然后是边角边的条件，在判定三角形全等时，需要判断两边夹角对应相等．要判断相似是不是三个条件都换成对应成比例就可以了？不成，角度不能对应成比例，角的大小变了形状就变了，所以角度只能对应相等．于是该条件变为：两条边对应成比例，并且夹角对应相等，就可以判定两个三角形是相似的．千万不能说成对应角成比例！

接着是角边角的条件，判定全等的条件是两角夹边对应相等．现在要判断相似应该改为：两个角对应相等，并且两个角之间的夹边对应成比例吗？不需要对应成比例．

最后是角角边的条件，角角边定理中只有一条边，根本就没有对应成比例的说法．所以，压根儿就没这么一个定理．这就是说，只要知道三角形有两个角对应相等，就可以直接判定两个三角形相似．

总结一下，判断两个三角形相似的条件有三个：第一，三条边对应成比例；第二，对应边成比例，且夹角相等；第三，两个角对应相等．没错，我们用不着判断三个角相等．判定定理研究明白了，我们就用它解决个具体问题吧．

如图9－4所示，在△ABC 中，AM 平分∠A ，求证：$MC:MB=AC:AB$.

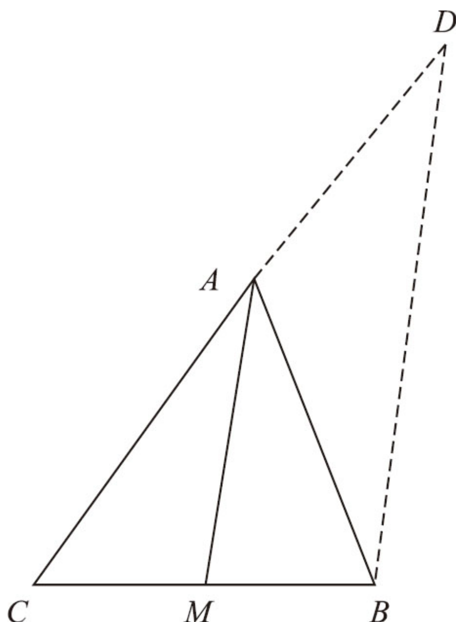


图9－4

已知条件非常简单，但结论却让我们产生了怀疑：为什么角平分线截断的两条线段和它原来三角形的夹边有比例关系呢？下面，我们就来深入分析一下：要证明边的比例关系有两种思路，一种方式是利用三角形相似原理，另一种方式就是利用平行线把线段截断，然而从图中我们看到MC 和MB 位于同一条直线中，但AC 和AB 不属于同一条直线，因此要让这两组线段对应成比例，必须进行一下图形的变换，对应的思路也就有两种：一种方式是把AB 和AC 转移到同一条直线上，然后和MC 、MB 去对比；另一种方式则是把MC 、MB 折断，把它们移动到一个和△ABC 相似的三角形中．

下面，我们采用第一个思路进行证明：把AC 、AB 转移到同一条直线上，很容易想到的办法是把AC 或者AB 延长，截取出与另一条边相等的一条线段来．假设我们把CA 延长至D ，使$DA=AB$ ，比例关系就被移到了CD 这条直线上，而我们需要证明的是$CA:AD=CM:MB$ ．要想让这组比例关系成立，则必须要求DB 和AM 平行，因此我们可以连结DB ．而要证明它们两者平行，则需要内错角或同位角的帮助．接下来

我们就看一下$\triangle ADB$的角度关系，由于$AD=AB$，这个三角形的两个底角$\angle D$和$\angle ABD$是相等的，同时，要判断平行，我们还需要找它们的同位角或内错角．根据图示不难发现：$\angle D$的同位角$\angle CAM$和$\angle ABD$的内错角$\angle MAB$都位于$\angle CAB$的内部，又因为AM是角平分线，所以这两个角又是相等的，所以我们终于知道这四个角全部都是彼此相等的．

以下是完整的证明过程：

$\because AD=AB$（作图所得），

$\therefore \angle D=\angle ABD$（等边对等角）．

$\because \angle D+\angle ABD=\angle CAB$（外角定理），

$\therefore 2\angle D=\angle CAB$．即$\angle D=\frac{1}{2}\angle CAB$（等量代换）．

又$\because \angle CAM=\frac{1}{2}\angle CAB$（角平分线的定义），

$\therefore \angle D=CAM$，

$\therefore DB\parallel AM$（同位角相等，两直线平行），

$\therefore MC:MB=AC:AD=AC:AB$（平行线截线段成比例）．

以上我们介绍了相似三角形的判定定理，需要注意的是：虽然经过平行线截断后可以产生相似三角形，但相似三角形却并不一定是被平行线截出来的．在实际问题中经常有两个三角形翻转重叠地交织在一起的情况，由于三角形相似不像三角形全等那么直观，必须严格地按照定理往下推演，不能只依赖于直觉．

◎ 尺规作图之乘除法

在介绍尺规作图时我们说过，几何里的尺规作图就是代数里的加减乘除．前文我们只是提到了加减法和乘法，而除法，只是研究了一下角平分线和垂直平分线的作法．我们要知道，做除法可不能只是处理2的倍数，如果遇到线段三等分的问题，又该如何处理呢？

要通过尺规作图处理乘除法的问题，必须要用到相似定理．相似定理又如何实现线段的三等分呢？其实，具体的操作方法还是蛮不讲理的，因为几何作图里头是绝对不允许使用刻度尺的．但是这次只能是不讲理一次了，我们要自己画一根刻度尺出来．

首先，题目给出一条线段AB 让我们三等分，就先把这条线段复制一条出来，这个操作我们已经很熟悉了，只需要用圆规比量一下就可以了．但接下来我就不讲理了，我以这个线段的端点A 为起点，往右上方画出一条射线AF ，然后我用圆规设定一个单位长度（可看作“1”），然后就在自己作的这条射线上依次作出三段标记M_1，M_2，M_3，使它们之间的间距相等．当上述操作完成后，就相当于在AB 上方斜着放了一把刻度尺．只不过，这把尺子的刻度是随意定的．在这里摆上一把刻度尺又有什么用处呢？就是要利用相似图形的性质，把这个均匀的比例缩放到已知线段AB 上．具体方法也很简单：先把这个刻度尺的最后一个端点M_3 和B 点连结起来，这样就形成了一个三角形ABM_3 ．现在只需要经过M_1、M_2 这两个刻度点作两条平行于BM_3 的辅助线就可以了．平行线作完以后，就会把底边AB 均匀地切分为三段了．（如图9－5所示）具体操作过程如下：

第一步，过点A 作射线AF ，任选定长L ，在AF 上分别截取M_1、M_2、M_3 三点，使各点之间的间隔等于L ，并连结BM_3 ．

第二步，过点M_2 作$M_2N_2 \parallel BM_3$ ，交AB 于N_2 ．

第三步，过点M_1 作$M_1N_1 \parallel BM_3$ ，交AB 于N_1 ，N_1 和N_2 两点即为所求．

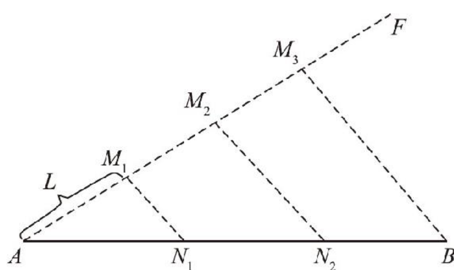


图9 - 5

以上，就是通过尺规作图对一条线段N 等分的办法．这也就是通过尺规作图实现除法的标准方法，上述操作的原理非常简单，但是操作却是相对比较复杂的，而且还蛮不讲理地作了一个刻度尺．关于刻度尺的问题，还是需要解释一下：之前之所以强调不用刻度尺，表达的主要含义是不需要标准的度量衡，不需要标准的刻度尺．虽然在做除法时自己仿造了一把刻度尺，但是由于我们画的这个刻度尺的刻度是随便定的，并不是标准的尺子，所以即使现在已经把线段分割完了，我们仍然不知道线段长度是多少．因此，这和通过真的刻度尺分割的原理还是有本质区别的．

接下来，我们再研究一下如何通过尺规作图实现真正的乘法：其实，在几何学里乘法有两个含义：一个含义是指长度变化，即直接把直线的长度增加多少倍；另一个含义则是指面积变化，即让两个线段相乘，变成面积．看起来好像长乘宽很容易实现，只需要作个长方形出来就可以了．但是，现在研究的是更复杂的一种方式：不需要作长方形，只是让你画一条线段出来，使这条线段等于已知的两条线段的乘积．按道理说，长度乘以长度应该得到面积，为什么还会是长度呢？这是因为，我们可以事先规定好单位长度．它表示的含义是：根据这个单位长度“1”，判断一下给定的这两条线段分别是这个“1”的几倍，然后把它们的乘积画出来．假设其中一条线段是单位长度“1”的2倍，另一条线段是其长度的3倍．那么，只要画出来的线长是它的6倍就可以了．但问题在于，两条线段是任意给定的，根本就不是单位长度的整数倍，那么，我们应该如何实现线段的乘积呢？同样需要用相似原理！

题目给定的三条线段如图9 - 6所示：求作一条线段c ，使线段c 的长度满足$c = a \times b$ ．由题意得知，a 、b 、c 三条线段的比例关系为$c:b$

$= a : 1$，所以我们可以把单位长度和线段a的长度拼成一个三角形，再把这个三角形放大b倍，就得到了所求线段．具体的操作步骤如下：

第一步，作出任意角A，在$\angle A$的两条边上分别截取AB，长度等于“1”，AC的长度等于线段a的长，最后连结BC．

第二步，延长AB至E，使得AE的长度等于线段b的长度，过E点作$EF \parallel BC$，交AC的延长线于点F，线段AF即为所求．

证明过程如下：

$\because EF \parallel BC$（作图所得），

$\therefore AF : AE = AC : AB$（相似定理）．

又$\because AB = 1$，$AC = a$，$AE = b$（作图所得），

$\therefore AF : b = a : 1$（等量代换），

$\therefore AF = a \cdot b$．

单位长度“1”：

线段a：

线段b：

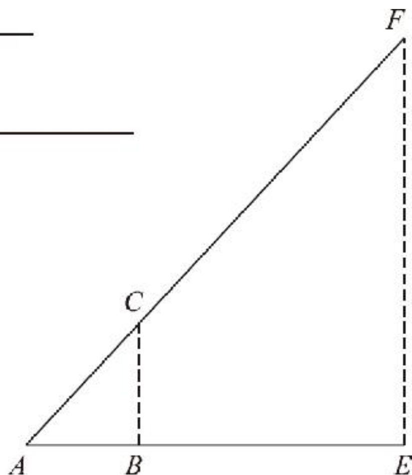


图9 - 6

以上就是通过尺规作图实现乘法的具体步骤．至此，几何作图的加减乘除就全部介绍完了．在几何学里，加减法通常要利用全等的原理去做，可以在线的基础上加减线，或者角的基础上加减角；乘除法，通常都用相似图形的原理去做，把要乘除的线摆在相似三角形的两边，最后用第三边的平行线一截，就得到了我们想要的结果．那么，线段的长度可以乘除了，角的大小能除吗？

十　圆

◎ 圆和角的关系和几何学的三大难题

几何学不是无所不能的．例如：要通过尺规作图的方式对一个已知角进行三等分就是绝不可能的，这曾是著名的几何学三大难题之一．那么几何学的三大难题分别是什么呢？

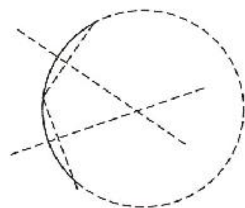
①化圆为方的问题；②三等分角的问题；③立方倍积问题．第一个问题化圆为方，是说求一个正方形，使得它的面积等于给定的一个圆的面积．第二个问题，是说把任意一个给定的角平分成三等分，不是说所有的角都不能三等分，像180°、90°的这些角还是很容易三等分的．但是，如果题目随便给定一个角度要求我们三等分，那就做不到了．第三个问题立方倍积，是指给定一个固定边长的立方体，让你求一个新的立方体，使得它的体积等于原立方体体积的2倍．这三个问题曾经难倒了无数的数学家．那么，后来这些问题怎么办了呢？和我们提到的第五公设的问题一样，他们都被证明是不能通过尺规作图实现的．当然，通过别的办法还是可以实现的．

那么，这些问题真的无法解决吗？它们无法实现的这个结论又是通过什么方法证明的呢？其实，它们都是通过把几何问题转换为代数问题，再通过代数方法证明的．由于过程非常复杂，在这里就不给出证明了．不过我们仍然可以仔细分析一下，能够通过尺规作图解决的所有问题都具有哪些特征：几何学能做线段的加减乘除，如果我们把原来的线段视为整数的话，就相当于通过几何作图画出了整数和分数．但是对于角呢，我们却只能做加减，不能做乘除，其实这个问题的本质，和化圆为方的问题完全相同．如果我们能够把一个角三等分，就相当于把这个角对着的圆弧三等分，问题的关键就在于，没办法把圆弧三等分，而之所以如此，又是因为通过尺规作图根本就不能画一段圆弧，让它等于已知线段的长度．同样也不能画一条线段等于圆弧的长度，因为直线和圆弧各自遵循着不同的规律．在此讨论一下圆弧的特点：

圆弧是圆的一部分．如果可以确定一条曲线是圆弧的话，就可以通

过尺规作图的方法，找出它的圆心和半径，进而把这一小段圆弧补充为完整的圆．就和线段延长为直线的道理是一样的，只要看到一小截线段，就能沿着这个线段的方向，把它的两端无限延长，得出一条直线．根据一小段圆弧画出整个圆，显然不能通过直尺直接延长来实现，那应该怎么做呢？

办法很简单：由于圆心距离圆弧上每一点的距离都等于半径，所以我们就可以在一段圆弧上任意取三个点，只要求出到这三个点的距离相等的一个点就可以了．这个问题是我们刚刚处理过的：由于线段垂直平分线上的点到两端点的距离相等，所以我们可以从三个点中任意连结两条线段，然后作出两条线段的垂直平分线就可以了，两条垂直平分线的交点，到这三个点的距离相等，因此这个点就是圆弧的圆心．由于圆心到任意一点的距离都等于半径，所以只要确定了圆心，半径也就得到了．求得圆心和半径以后，就可以用圆规画出缺失的那一部分圆弧，也就可以把任意一小段圆弧补充为一个完整的圆形．（如图10－1所示）



（1）在圆弧上任取三点，连结出两条线段．
（2）分别作两条线段的垂直平分线，两条垂直平分线的交点即为圆心．
（3）通过圆心和半径把圆补充完整．

图10－1

上述操作意味着：任何一段圆弧都有一个确定的半径，这是圆弧的第一个基本特征．如果把圆弧的两个端点和圆心连接起来，就得到了两条半径，而这两条半径之间的夹角就叫作圆心角，圆心角就是半径旋转过的角度．圆心角就是圆弧的第二个特征．从这个意义上说，可以把圆形理解为半径绕着圆心转了360°得到的结果．正因为如此，圆形是高度对称的图形，它有无数条对称轴，圆的任意一条直径所在的直线都可以当作它的对称轴．那么，既然半径可以转动，圆心角是不是也可以转动呢？如果夹着圆心角的两条半径同时旋转，那么不管它旋转到什么位置，圆心角对着的圆弧长度始终是不变的，这就是圆弧的另一个基本性质：在圆的内部，相等的圆心角对着的圆弧同样是相等的，反过来说，等长的圆弧对应的圆心角同样相等．

如果我们把圆弧上的两个端点，和它对面圆周上的任意一点连起来，就又会产生一个新的角，这个角叫作圆周角．圆周角和圆心角有什么关系呢？如图10 - 2所示：对于已知圆弧AB 而言，O 点是它的圆心，因此$\angle AOB$ 就是它的圆心角．C 点是另一侧圆弧上的任意一点，因此$\angle ACB$ 就是它的圆周角，要研究圆心角和圆周角的关系，离不开半径的帮助，因此，我们连结CO 并延长至D 点，就会发现：

$\because OA=OC$（半径长度相等），

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$（等边对等角）．

又$\because \angle AOD=\angle OAC+\angle OCA$（外角定理），

$\therefore \angle AOD=2\angle OCA$（等量代换）．

同理可证：$\angle DOB=2\angle OCB$．

$\because \angle AOB=\angle AOD+\angle DOB$（整体等于部分之和），

$\therefore \angle AOB=2\angle OCA+2\angle OCB=2\angle ACB$，

即$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$．

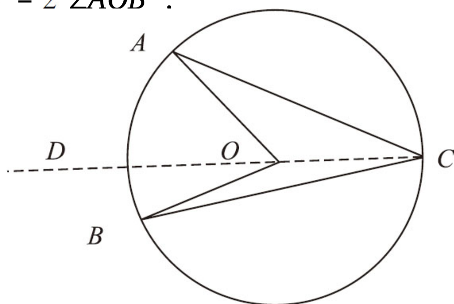


图10 - 2

通过上述证明过程我们发现：圆周角等于圆心角的一半．由于C 点是任取的外侧圆弧上的一点，因此，同一段圆弧对应的所有圆周角全部相等，其大小等于圆心角的一半．而这就是圆弧的最后一个性质．

◎ 圆和直线的关系

接下来，要研究一下圆和直线的关系：如果我们先在白纸上作一个圆，然后随便画上几条直线就会发现，根据圆和直线的距离不同，它们之间存在有四种关系：当距离非常远的时候［如图10－3（1）所示］，直线就位于圆的外面，和圆周没有任何交点，这是“八竿子打不着”的关系，就不讨论了．接下来，我们逐步把直线向圆的方向靠近：

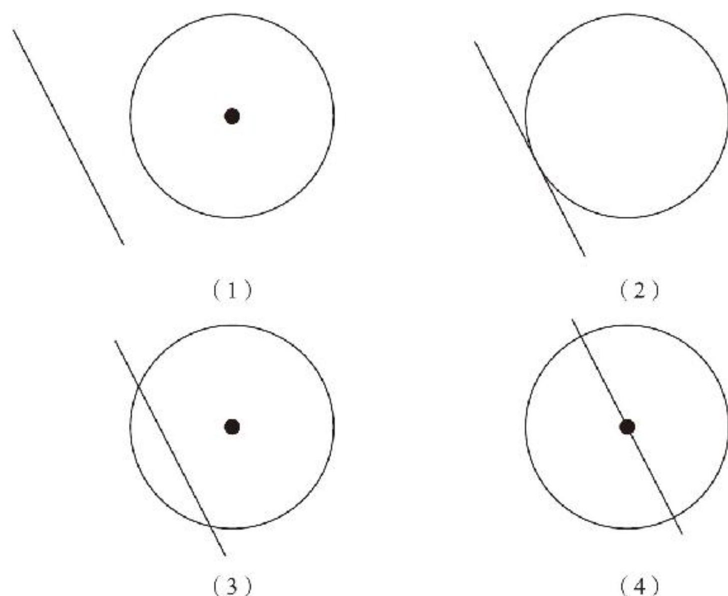


图10－3

在逐步靠近的过程中，我们就会发现，总有那么一个时刻，圆和直线刚好挨在一起了［如图10－3（2）所示］，此时，圆和直线有且仅有一个交点，我们把这种关系叫作相切；顺便说一下，我一直认为“相切”这个词汇很不确切，这直线明明只是刚刚和圆贴到一块儿，没有把圆切下来一部分，为什么要把这种关系叫相切呢？传统习惯就是这样，而且我们还把和圆贴在一起的直线叫作圆的切线．

如果这条直线向着圆心的位置继续移动又会产生什么结果？它就会把圆切割成两个部分，同时这条直线就会和这个圆产生两个交点，这两个交点之间也会卡住一截线段，于是，我们就把这条直线叫作割线，割线在圆弧中间卡住的线段叫作弦．［如图10－3（3）（4）所示］请注

意，当直线把圆切开了以后，这条直线不叫“切线”，而是叫“割线”！按道理说，“切”和“割”这两个动作根本没有什么区别，它们不都是把一个东西劈成两半吗？但是在圆和直线的关系之中，我们就要把和圆贴在一起的线叫作切线，把已经切成两半的线叫作割线．这个怪异的习惯称呼，千万不要记混了！切线、割线和圆之间又有什么关系呢？

如图10－4（1）所示，切线垂直于经过切点的直径．这是由于圆是高度对称的，同时圆的切线是一条直线，经过180°的翻转以后，直线也可以重合在一起，所以，圆和它的切线经过对称的翻转以后，得到的肯定就是相互重合的图形．既然是相互重合了，说明这条切线和圆都被均匀地一分为二了，直线一分为二得到的是直角，圆一分为二得到的是它的直径．所以，过切点的垂线一定经过圆心，经过切点的直径也肯定是垂直于切线的，这就是圆的切线的基本性质．

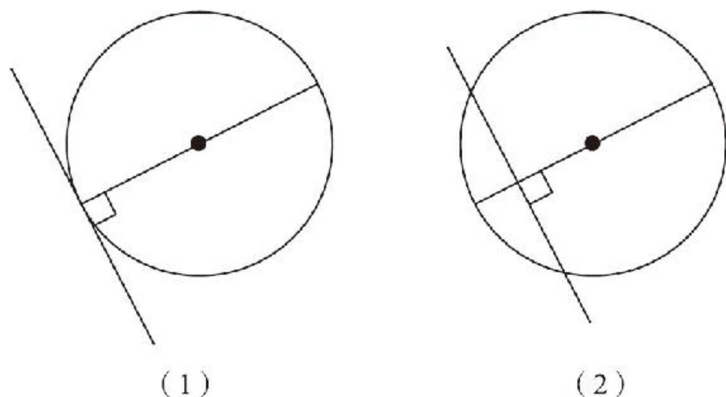


图10－4

同样，割线割出来的弦也有这种对称的特点．如图10－4（2）所示，如果作一条弦的垂直平分线就会发现，这个垂直平分线肯定也是经过圆心的．为什么呢？因为弦和它切下来的圆弧都是左右对称的关系，既然垂直平分线能把弦一分为二，肯定也会把对应的弧线平分了，自然它就把整个圆也平分了．这就是弦的基本性质：弦的垂直平分线经过圆心，垂直于弦的半径也一定会把弦平分．

关于切线和弦的性质定理，都有一套严格的证明过程，由于圆这种图形的对称性实在太直观了，只需要做一个简单描述就可以了．我们的学习过程，也是循序渐进的：当学习平行线的时候，刚刚接触证明过

程，每一个证明步骤都非常严格，因为在那个阶段，我们关注的重点不是平行线的性质本身，而是几何学的总体特征；入门以后，再学起东西来就是一目十行了．过去可能用十天时间才能学习一节的课程，学到最后的阶段，每一天都会学十天的课程．任何一门课程都有一定的门槛，一开始的时候，只能慢慢入门，通过逐步引导，找到这门课的感觉，所以讲得比较细，在这种状态下会感觉书越读越厚；一旦形成了对这门课程的整体认识，就可以像通过一个全等的定理把尺规作图的绝大部分知识融会贯通起来一样，越到最后学得就越快，同一本书也就越读越薄了．

下面，我们继续分析圆的性质：

当这条直线离圆心的距离减小到0以后就会穿过圆心，显然，穿过圆心的直线段就是直径．虽然看上去是直线，但直径也对应一个圆心角，只不过圆心角的大小是180°．既然是圆心角，它就一定有自己对着的圆周角：如果我们随便从圆弧上找一个点，把这个点和直径的两端点一连，就会发现因为圆周角等于圆心角的一半，所以直径对着的圆周角，一定等于一个直角，因为直径的圆心角是180°，一半肯定就是90°了，这就是直径的基本性质．（如图10 - 5所示）理解了直径的圆周角性质以后，就可以利用它来做一件事：经过圆外一点，作已知圆的切线．

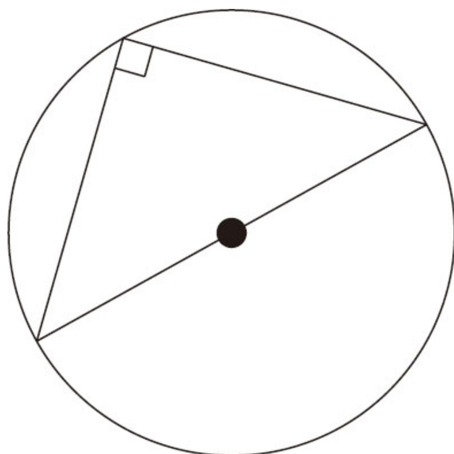


图10 - 5

对于圆的切线问题，如果要求不是很严格的话，只需要拿着直尺比

一比、转一转，直线经过已知点，并且和已知圆相切就可以了．作为一个逻辑严谨的作图方法，这样的操作是不可取的，因为圆上的点有无数个，当直线逐步靠近圆的时候，我们很难分清到底哪一个点是它们的切点．所以要作切线，还得从切线的基本性质出发，通过两条线的交点，把切点找出来．

如图10－6所示，过切点的半径垂直于切线．这就意味着，如果把圆外一点和圆心及切点连结起来，应该是一个直角三角形．同时这个直角三角形的斜边，就是已知点到圆心的连线，而它的两条直角边分别是圆的半径及我们要作的切线．由于圆心和已知点都是固定的，所以很容易得出直角三角形的斜边．由于半径是已知的，也知道了一条直角边的长度，只是切线的长度不知道．由于直径对应的圆周角是直角，可以用这个斜边长度为直径画一个圆，这个圆上任意一点到斜边上两点的连线都是直径的圆周角，直径的圆周角是直角，所以这个圆上的任何一点都满足直角三角形的条件．这个圆一作出来，和原来的圆就会有两个交点了，连结任何一个交点和已知点，得到的就是圆的切线．具体的操作步骤如下：

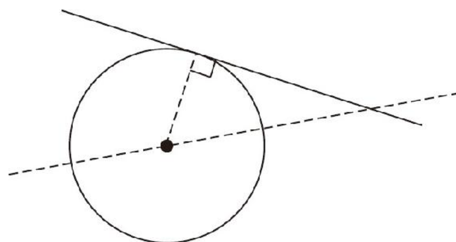
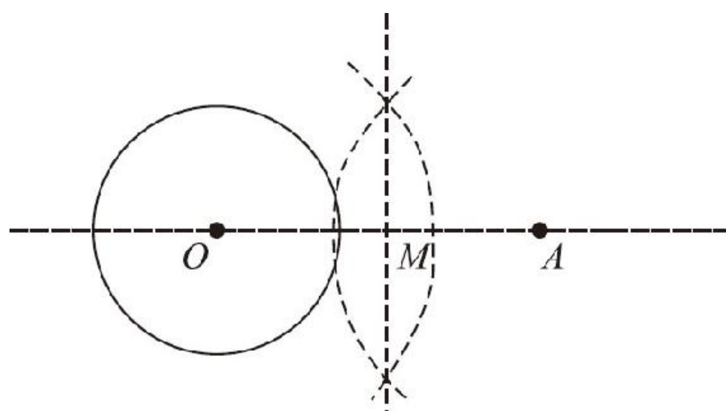


图10－6

如图10－7所示，已知圆点O 和圆外一点A ，求一条经过A 点的切线AB ．



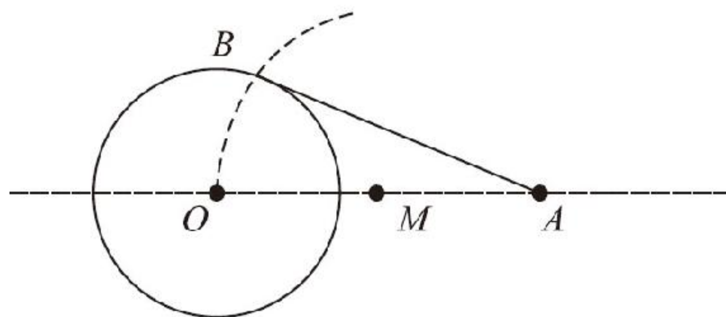


图10－7

第一步，连结OA，并作出OA的垂直平分线，交OA于点M．

第二步，以M为圆心，以MO长为半径画圆，交圆O于B点，连结AB，直线AB即为所求．

证明过程如下：

∵M为OA中点，且MO为半径，

∴OA为圆弧OB的直径，

∴$\angle OBA$为直角（直径的圆周角为直角）．

∵B是圆O上一点，

∴OB为半径．

又∵$OB \perp AB$（已证），

∴AB是圆O的切线．

以上就是通过尺规作图方法作已知圆的切线的步骤．实际上，直径的圆周角带来的帮助，远不止作一条切线这么简单．

◎ 几何作图之乘方开方

我们已经掌握了通过尺规作图实现加减乘除的方法，那么乘方开方该怎么做呢？乘方的本质是乘法，因此乘方运算可以通过连续相乘来逐步实现；但是开方运算就完全不同了，像三大难题之一的立方倍积问题，就是要对一条线段开立方，而且这是一个已经被证明无解的问题，所以开立方的运算是无法通过尺规作图来实现的．尽管如此，我们却可以对一条线段开平方．接下来我们就一起来分析．

单位长度“1”：____

线段a ：________

和乘除法的操作类似，开平方的前提也需要有一个已知线段表示单位长度“1”．但即使如此，还是很难想象如何对一条线段开平方．首先假设，如果有一条线段b ，它的平方等于已知线段a ，也就意味着$a:b=b:1$，也就是说，已知线段长除以所求线段长等于所求线段长除以单位长度“1”．因此，可以把这四条线段放到一对相似三角形中，通过相似定理来求出未知线段．但如何作出两个相似三角形呢？我们就需要利用直径的圆周角等于直角的定理来实现了．具体方法如下：（如图10 - 8所示）

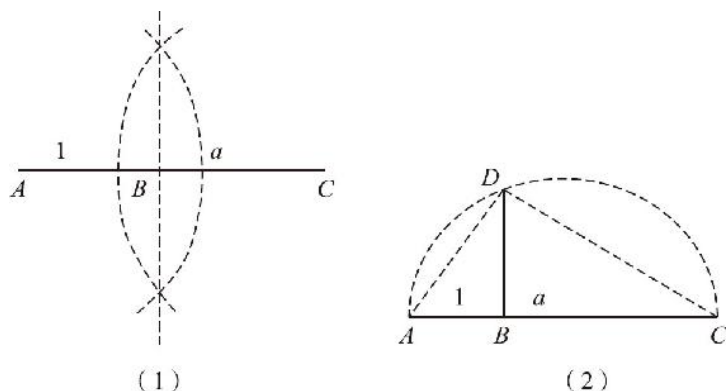


图10 - 8

第一步，在一条直线AC 上截取AB 等于单位长度“1”，BC 等于已知线段a ．

第二步，以AC为直径作圆，过点B作直线$BD\perp AC$，且交圆弧于D，BD即为所求．

证明过程如下：

∵AC为直径，

∴$\angle ADC=90^{\circ}$（直径的圆周角为直角）．

∵$BD\perp AC$，

∴$\angle ABD=\angle DBC=90^{\circ}$．

∵$\angle DAB=\angle DBC-\angle ADB$（外角定理），

又∵$\angle BDC=\angle ADC-\angle ADB$（整体等于部分之和），

∴$\angle DAB=\angle BDC$（等量代换）．

同理：$\angle ADB=\angle DCB$．

在$\triangle ADB$和$\triangle DCB$中：

$$\begin{cases}\angle ADB=\angle DCB,\\ \angle ABD=\angle DBC,\\ \angle DAB=\angle CDB,\end{cases}$$

∴$\triangle ADB\backsim\triangle DCB$（三个对应角相等），

∴$AB:DB=DB:CB$（相似三角形对应边成比例），

∴$DB\times DB=AB\times CB$，$DB=\sqrt{AB\times CB.}$．

又∵$AB=1$，$CB=a$，

∴$DB=\sqrt{a}$．

以上就是通过尺规作图的方式，为已知线段开平方的结果．具体过程总结如下：首先，把已知线段和单位长度的线段拼在一起；然后，过拼接点作垂线；之后，以拼合后总长度为直径画圆，圆和垂线产生一个交点，连结交点和垂足，两者之间的距离就是开方的结果．掌握了尺规作图的加减乘除和乘方开方的操作后，几何学的部分就接近尾声了．回顾前面的内容不难发现：

几何学是没有数字的数学，在尺规作图中隐藏的同样是加减乘除的基本规律．在课程中，我们从几何学的根源——分地问题出发，一起见证了绳子和尺规是如何在没有准数的条件下实现我们所需要的一切的．为什么在不知道线段的长短、不知道图形面积的情况下，却仍然可以做加减乘除乘方开方的运算呢？这个问题的答案恰恰就是几何学应该带给

我们的最大启示！

根本原因只有两个：

第一，加减乘除等运算的性质是这个世界运动变化的根本规律，而不是数字独有的性质．在代数中，字母、算式同样是可以加减乘除的，所有这些内容之所以能够加减乘除，仅仅是因为它们是对世间万物的一种抽象方式．

第二，点、线、面是对世界的一种抽象表达方式．人类文明是从数数和画画开始的，如果说数数对应的是算术，那么画画对应的就是几何．在画画的时候，笔落在纸面上，只能产生一个点，点运动起来以后就产生了线，多根线条组合起来就形成了面和体．

正是因为加减乘除是世界万物的基本规律，并且点、线、面是世界万物的一种抽象表达，所以点、线、面才会具有加减乘除的运算能力．世界万物有加减乘除的性质，好比人有自己的五官相貌；点、线、面是世间万物的抽象，好比照片是对人的一种抽象．因为人的五官相貌客观存在，所以我们才能通过照片识别出人的五官；同理，因为世界有加减乘除的规律，所以从点、线、面中就可以找到实现加减乘除的方法．

随着几何知识的深入学习，我们不由得对古人的智慧发出由衷的感叹：感叹古人的认知能力，他们不但能够把一切都抽象成点、线、面，而且能够把一切多边形转换为矩形；感叹古人的动手能力，他们仅仅利用手中的绳子，就可以做到垂直、平行、平分，甚至乘方、开方；更感叹古人的逻辑推理能力，他们居然能够从几条显而易见的公理出发，把如此众多的定理组织成一个无懈可击的逻辑大厦．在这样精美的建筑面前，我们不禁被古人的智慧所折服，被几何学的精美所震撼．

十一　解析几何基础

◎ 从几何学开始，重新认识世界

虽然几何学是没有数字的数学，却仍然存在着加减乘除这些基本的计算方法．加减乘除是这个世间万物的基本规律，点、线、面是世间万物的一种抽象方式．那么，加减乘除还有没有其他的表述方式呢？难道这个世界就只能抽象为点、线、面吗？关于这个问题的讨论，可以引发一门全新的学问．

要研究一门学问，最方便的办法就是追本溯源，寻找这门学问的根本出发点：在学习代数学时，我们知道了人类有一个原始的动作是数数，数数的目的是为了掌控时间的变化．在学习几何学的时候，我们知道人类的另一个原始动作是画画，画画的目的是认识空间的规律．在画画的过程中，我们发现：笔落在纸面上后就会产生点，点运动起来就会产生线，线组织起来就形成了面．因此，点、线、面就成了我们对世界的一种抽象方式．理解了点、线、面的关系，也就认知了这个世界空间结构的基本规律．那么，这个世界上除了画画之外，还有没有其他的工作呢？如果画画中可以产生点、线、面，那么其他工作中是不是也可以产生类似的一些基本元素呢？比如，和画画类似的剪纸．

剪纸是我国民间的传统艺术，不管是人物还是动物，不管是自然风景还是人物活动，无论多么复杂的场景，都可以通过剪纸的方式呈现出来．为什么那么多不同的事物都能通过剪纸来表达呢？有没有一个事物它只能通过照片拍摄出来，只能通过绘画画出来，就是不能通过剪纸剪出来呢？不可能会有这种场景！因为剪刀剪出来的一个小洞就相当于画面上的点，剪出来的一条缝隙就相当于一条线，有了点、线这两个基本元素及它们之间的组合，当然就什么场景都可以呈现了．之所以产生这样的思路，是因为我们学了几何学，才会把剪纸画也抽象成点、线、面．那些剪纸的艺术家们可不一定这么理解，他们对整个世界的认知有自己的一套思维方式——整个世界是由不同的剪纸方法组合而成的．

上小学时，当我第一次学会折纸飞机，就曾经想过：折纸的方法除

了能折出纸飞机以外，还应该能干别的，没多久我又学会了折纸船的方法．到这个时候我就开始想了，这个世界上第一个折纸飞机的人，他是怎么想到这种方法的呢？除了纸飞机和纸船之外，是不是所有的东西都可以通过折纸的方式把它们呈现出来呢？为此，我还曾做过很多尝试，可惜并没有取得成功，虽然我也能折出一些新鲜花样，却没有找到能折出世界上任何一种器物的通用做法．虽然我没有在折纸方面取得成功，却彻底摸清了另一类手艺的玩法，那就是通过高粱秆扎出各种不同的造型．

高粱秆就是指长着高粱穗子的一段笔直的细秆，它的表皮又细又薄又有弹性，从高粱芯上把它揭下来以后就可以当作竹篾用．与之相反，高粱中间的芯比较粗，也比较软，如果把高粱的表皮弯曲下来扎上去，就可以做成各种造型．每年秋天，高粱熟了以后，几根高粱秆就可以玩上一阵，如果不小心的话，还可能把手指头扎破了．我只会做眼镜，做简单的飞机．除此之外，我从来没见过别的造型．但是就有那么一天，我突然就发现了扎高粱秆这门手艺的一般规律：只要把高粱的芯当作骨架，把高粱秆的表皮当作线条，任何事物都可以轻而易举地做出来．于是，我一下午就做出了20多种不同的造型，有各种型号的飞机、坦克，还有各种动物造型，有些造型做得非常逼真．在我的眼中，世界上所有的事物都可以抽象为高粱秆．当我看见一只鸡、一条狗的时候，我就仿佛直接透过外形看到了它们的内部骨架，仿佛在我面前的活生生的动植物都变成了高粱秆扎成的玩具．从表面上看，好像是我自己创作出一个全新的造型；实际呢，我只是看到了别人没有看到的东西而已．

之所以讲这个故事，是因为我想让你的思想境界从几何学的世界里再升华一次：我们学了几何学知识，知道了点、线、面的性质和规律，已经加深了对这个世界的理解．但是，不能因为学了几何学，就认为这个世界只能是由点、线、面组成的．这个世界可以抽象成很多层次，每一项工作、每一门艺术，都隐含着对这个世界的高度抽象．以舞蹈和音乐为例：人的肢体动作是有限的，世间万物是复杂的，而舞蹈却能够通过一系列简单的肢体动作，把世间百态的关键特征演绎出来．我们不但可以通过舞蹈模仿动物的动作，而且可以模仿植物的生长；我们不但能够模拟生物，而且可以模拟阳光雨露，模拟雨雪风霜．因为世界上所有

的运动方式都可以抽象为几个简单肢体动作的组合．用舞蹈来表现山山水水，虽然很难，但舞蹈这种形式终归还是可见的．而音乐就不同了：音乐只能把世界抽象成宫、商、角、徵、羽这几个音符．就是这几个音符，曾经让钟子期发出高山流水的感叹，曾经让孔子三月不知肉味，曾经让卓文君私奔而走，曾经让司马懿四十万大军止步．不是因为演奏者的技法有多么高超，而是因为世界本来就是多姿多彩的，万物本来就可以抽象为多种表达形式．

人类随着历史的发展，形成了不同的分支．由于地域的阻隔，不但出现了不同的语言，而且出现了几何和代数不同的数学分支．但随着人类文明的发展，大航海时代的来临，全世界的文明又开始逐渐汇集到一起，数学的这两个分支也因此而逐渐合流．

◎ 一只蜘蛛引出解析几何的发现

解析几何是加减乘除这些规律的另一种抽象方式．所谓解析就是分析和求解，而分析求解通常需要通过代数表达式来实现；所谓几何指的就是几何图形．从这个名字上，我们就不难发现这是一门代数和几何相互融合的学问．代数和几何之间的共同点至少包括三个方面：第一，它们都是对世界万物的抽象，因而它们的本原是相同的；第二，它们都需要用到加减乘除的运算规律，因而它们的思维方式是相同的；第三，它们都是利用几个已知的规律和数据来对一个具体问题做出分析求解，目的是相同的．既然它们有这么多共同点，为什么还需要解析几何这样一门新的学问呢？它又能帮助我们解决哪些问题呢？要想了解这个问题，我们就看看17世纪的那个早晨，到底发生了什么．

16世纪末，正是人类自然科学的萌芽时期，伽利略刚刚去世不久，牛顿还没有出生．笛卡尔就诞生在法国的一个贵族家庭，受过高等教育，当过兵．虽然他学的是法律专业，却一直醉心于对数学的研究．在他看来，虽然几何和代数的本质是相同的，却各有自己的缺点．对于代数而言，代数算式在计算过程中是清晰明朗的，但不到最后一步看不到具体数据．对于几何而言，可以很直观地看到图形，但是通过尺规作图实现加减乘除的步骤却非常复杂，几何图形在计算过程中不如代数方程式简便．还有什么新的方法把代数和几何结合起来呢？笛卡尔一直在思考着这个问题．与此同时，他还有一些具体问题要解决，比如：天上的星星这么多，我通过什么方式来记录它们的位置？地上的军队在行军打仗的时候，总是处于运动之中，我又怎么来表示军队行进的位置和方向？这些问题一直在笛卡尔的心中挥之不去，甚至在做梦的时候，他都在思考这些问题．

17世纪的一个早晨，一只蜘蛛悬着纤细的蜘蛛丝，从房顶上倒挂了下来．这只蜘蛛悬挂在笛卡尔的面前，在微风中轻轻地摆动着．忽然，一个念头在笛卡尔心中闪现，他一下子想明白了所有的问题．我们不妨和笛卡尔一起来分析一下这个问题：对于一个悬挂着的蜘蛛而言，需要哪些数据才能描述它呢？首先，任何一个时刻蜘蛛所在的位置；其次，

蜘蛛的速度；最后，蜘蛛摆动时的轨迹．什么叫轨迹呢？就是蜘蛛在一段时间内陆续经过的路线．如果我们把线看作是由点的运动产生的，那么轨迹就是由位置的移动产生的．我们要列举的可不是三个独立的数字，因为蜘蛛无时无刻不在运动之中，所以它的位置、速度随时都在发生着变化．过去，对于位置、速度、轨迹这些数据而言，它们各自有着不同的表示方式，位置可以用到哪儿的距离表示，速度可以用代数算式计算，轨迹可以用几何图形来表示．但问题在于，这三组数据融合不到一起，不能显示在一个图像上．笛卡尔一直发愁的就是这个问题，但是就在那一刹那他忽然就明白了这一切．于是他把自己的想法整理在一本书里边，名叫《几何》．他所整理的几何和欧几里得的几何有着显著的区别，他把几何图形和代数表达式融合到一起，所以人们称之为解析几何．解析几何融合了代数和几何的优势，与之前的数学相比，解析几何至少有以下三方面的价值：

第一，过去我们说过，代数研究的主要是时间问题，几何主要研究的是空间结构，而解析几何很好地把时间和空间联系在了一起，人们可以通过静态的图形来研究运动变化的事物．

第二，无论是代数还是几何，都有一个共同点，那就是根据规律来寻找结果：一个代数方程就是一种规律的表达，一个几何图形同样是一种规律的呈现，当我们找到两个方程的解，或者找到两个几何图形的交点时，就是在为这种规律找到了一个确定的结果．解析几何的能力不止于此：除了根据规律找到结果以外，还可以根据数据归纳出对应的图形和代数表达式，根据一些现象总结出背后的规律．这件事情的意义是非同寻常的，因为找到规律就意味着获得新的知识．

第三，它是高等数学的基础．之后，牛顿和莱布尼茨各自发明了微积分理论，而莱布尼茨的微积分理论就离不开解析几何的帮助．

◎ 平面直角坐标系

解析几何到底是怎样把众多的数据融合到一起的呢？在正式研究这个问题之前，先来分析一个更简单的问题：当你正位于一个陌生的位置时，你如何正确地把自己的位置告诉你的朋友？如果不使用手机中的地理信息系统，你首先应该寻找一个你们两人都熟悉的，并且离你不太远的位置作为起点，然后再告诉他你所在的位置距离这个地方有多远．通常你的描述方式应该类似于：从那里出发，先向东走几百米，再向南走几百米就到了．现在，让我们分析一下这种描述位置的方式：

首先，从一个起始位置出发；其次，还必须通过两个方向、两个数据来描述；最后，除了给对方提供数字之外，还必须附带长度单位，你必须要告诉人家是走500米还是500千米．在解析几何中，像这种表示位置的方法就叫作坐标法．为什么我们必须要用两个数字来描述位置呢？因为一个数字只能表示一个绝对距离，到这个起始点距离相同的点有无数个，这些点分布在一个圆上，必须要通过两个数字才能表示清楚．如同别人问你在教室中的位置时，你总是要告诉他自己在第几行第几列．一个位置就是平面上的一个点，而现在通过坐标法，似乎能够把一个点和一组数字对应上了，这就是解析几何要做的第一步．

在解析几何里，上述这种位置的标注方法被称为平面直角坐标系，它由这样两部分组成：一个静止不动的起始点；两条在此垂直相交的带有方向和刻度的直线．这个起始点叫作坐标原点，带有方向和刻度的直线叫作坐标轴或者数轴．据说笛卡尔是在做梦时发现了坐标系的，他梦到了两支箭杆交叉在了一起，于是想到了坐标轴的样子．这当然只是一个传说了，但坐标轴的确就像两支箭杆十字交叉的结果（如图11 - 1所示）．

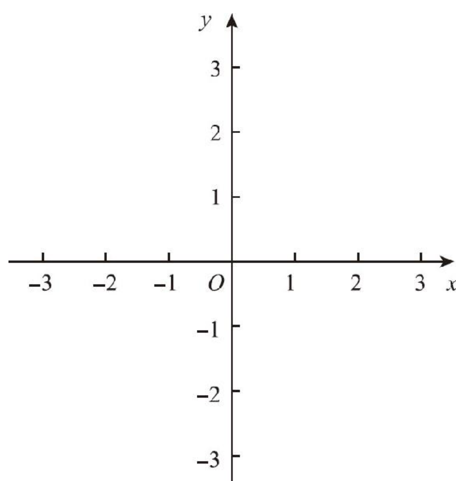


图11 - 1

一般把坐标原点用O 表示，把水平的坐标轴叫作x 轴，垂直的坐标轴叫作y 轴．在x 轴的末端带有一个向右的箭头，这表示x 轴上点的坐标从左到右逐渐增大；y 轴的方向垂直向上，这表示y 轴上点的坐标从下到上逐步增大；两个坐标轴垂直相交于坐标原点．整个坐标轴就像两把交叉的刻度尺，两条数轴上的刻度都是均匀的，把从0到1的这段长度叫作单位长，不管是在数轴的什么位置上，单位长度始终保持不变．尽管在纸面上画出的坐标轴长度是有限的，实际上坐标轴不是一条线段，而是一条无限长的直线．

当我们把一个带有原点、单位长的直角坐标系放在一个平面上的时候，这个平面上的所有的位置，就都具有了自己的坐标．如果随意在白纸上描绘一个点，那么这个点的位置就可以通过水平和垂直的一组数字来表示，经过这个点分别作x 轴和y 轴的两条垂线，垂线的垂足所在的位置，就是它的位置坐标．如图11 - 2所示：点A 在x 轴的坐标是2，y 轴的坐标是3，那么点A 的坐标位置是（2，3），我们用（ ）表示点的坐标，用逗号分隔开的两个数字表示坐标位置，逗号前面的数字表示的是x 轴的数值，后边的数字表示的是y 轴的数值．即使这个点落在坐标轴上，我们也必须带着两个数字，例如：B 点位于x 轴上的 - 3这一点上，因此它的坐标就是（ - 3，0），其中的0表示它在y 轴的坐标位置是0．有趣的是：一个坐标点在x 轴上的坐标值的绝对值，表示的却是它到y 轴的距离；而它在y 轴上的坐标值的绝对值，表示的却是到x 轴的距

离．这一点需要时刻注意，不要把坐标和距离的概念搞混．

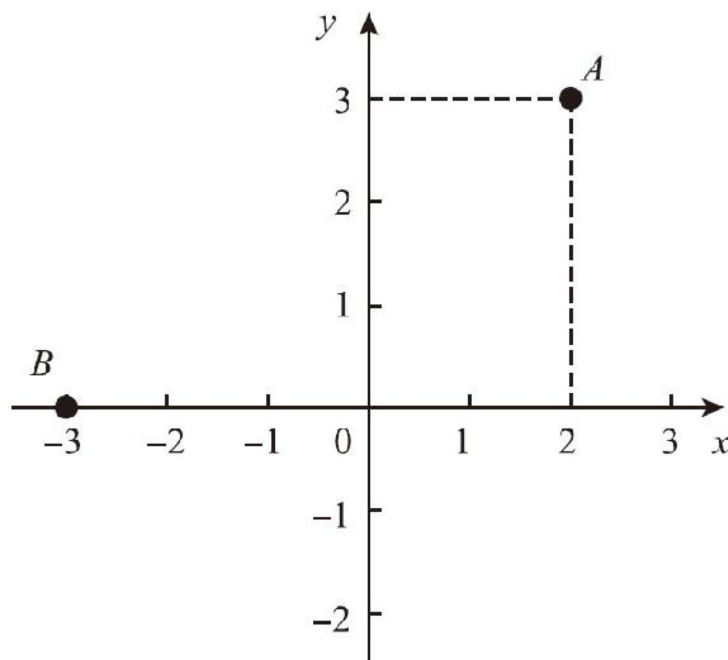


图11－2

坐标轴上不但有正数，而且有负数．同时，由于坐标轴是无限长的，所以当一个平面内出现平面直角坐标系以后，整个平面就被一个大十字分割成了四个部分，这四个部分又叫作四个象限，坐标轴右上角的部分叫作第一象限，从此开始按照逆时针的方向旋转，左上角的部分叫作第二象限，左下角的部分叫作第三象限，右下角的部分叫作第四象限．（如图11－3所示）之所以明确地分成这四个象限，就是因为这四个象限内的点，它们的坐标的正负是有区别的．

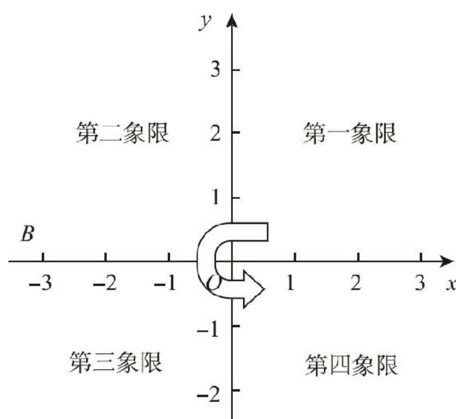


图11 - 3

第一象限位于坐标原点的右上方，在这一范围内的点，水平坐标位于x 轴的右半部分，垂直坐标位于y 轴的上半部分，因此这两个坐标数字都是正数，也就是说，第一象限的两个坐标数字都是大于0的．与之对应的第二部分位于原点的左上方，由于x 轴左侧的数字都是负数，所以在第二象限内的点，x 坐标都是负数，而y 坐标仍然是正的；同理，第三象限中的两个坐标数字都是负的；而第四象限的坐标则和第二象限完全相反．这些内容看似无聊，但是我们却必须从这些最基本的内容开始熟悉．

当我们把一个点变成了两个数字以后，解析几何就迈出了关键性的一步．通过两个数字描述一个点，你认为这样做方便吗？一点都不方便！如果在实际生活中，有人打电话询问你的位置，你肯定会告诉对方自己的具体方位，比如自己正处于某个银行或者某个饭店，即使这个地方彼此都不太熟悉，你可以拍一张照片发给对方，没有人会把自己所在位置的经纬度告诉对方．只是为了描述平面上的一个点，就需要一个坐标轴外加两个数字才能实现；如果要把一条线画出来，不是要通过无数对数字才能表示吗？

十二　函数图像

◎ 函数到底是什么

实际生活中，无论是自然界中的山山水水，还是人类建造的城市乡村，几乎每一个位置都有它对应的名称．通过数字的方式来表示一个位置，不但不直观，而且是乏味无聊的．然而我们要知道的是：通过数字来表示位置的这种方法并不是笛卡尔首创的，在很早以前，人类就开始在天文和航海的领域中使用它．这个场景我们也不难理解：在浩瀚的星空里，在茫茫的大海上，周围没有任何参照物，在这种前不着村后不着店的情况下，因为不得已才使用坐标表示法．笛卡尔把这种方法带入了我们的生活．

为什么笛卡尔在看到蜘蛛晃来晃去的时候，会恍然大悟呢？因为他当时忽然明白的，并不是通过坐标系来表示蜘蛛的位置．他发现这个蜘蛛晃动的规律，和伽利略看到单摆晃动规律是一样的．笛卡尔出生的年代正好在伽利略之后，他非常熟悉伽利略的单摆实验，因为单摆的运动是可以通过一个代数式来表示的，所以他自然就想到了，和这个代数式对应的，应该就是平面直角坐标系上的一条曲线．在解析几何中，解析对应的是代数表达式，几何对应的是几何图形．当笛卡尔想通了这一点的时候，解析几何的大门就彻底打开了．

对于坐标系内的任何一点，都需要两个数字来描述，一般来说，这两个数字之间是相互独立的．对于平面内的任意一点而言，它的横坐标和纵坐标之间没有必然的联系；如果这一点按照某个规律运动，结果就大不一样了．如果我们用横坐标表示时间，用纵坐标表示运动的距离，那么当物体在做匀速运动时，经过相同的时间就会移动相同的距离，因此，当物体运动的时间和距离呈现在坐标系上以后，一条直线就会清晰地显示出来，这不仅是代数和几何的融合，更是时间和空间的融合：有了解析几何的帮助，我们又掌握了一种认识世界的全新的方式：转瞬即逝的时间被凝固在了坐标系上，变化的规律凝聚为不变的图形，运动的轨迹变成了静止的曲线，世界呈现出了它的本来面目．

当然，解析几何所表达的图形不仅局限于匀速运动，只要在世界上存在两个相互依存的变量，只要它们之间存在某种一一对应的计算关系，它们之间的规律就可以通过坐标系上的图形来表示．整个世界无时无刻不在运动变化之中，因此也就产生了很多变化的数量，在这些变量之中，有的变量是主动变化的，而有的变量却是因为其他变量的改变而改变的．比如：一个人的年龄会因为时间而变化，物体的质量会因为体积而变化．我们把主动变化的量叫作自变量，把被动变化的变量叫作因变量，如果因变量能够被自变量的大小唯一确定，我们就说因变量和自变量之间存在函数关系，或者说因变量是自变量的函数，比如：在速度确定的条件下，路程就是时间的函数；在密度确定的条件下，物体的质量就是体积的函数．（如图12－1所示）

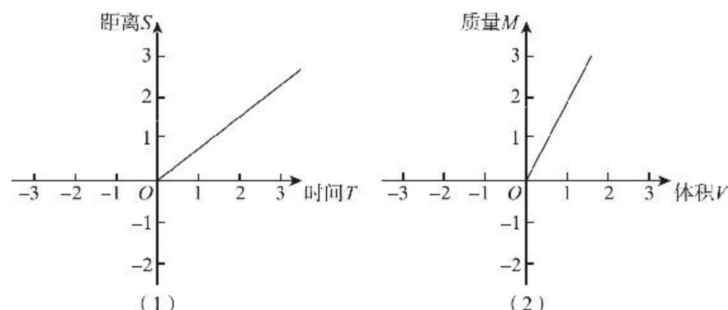


图12－1

在代数学里，我们常常可以把函数写成代数表达式的形式，如果用x表示自变量，用y表示因变量，那么函数的表达式就是$y=f(x)$．f指的就是某种确定的运算关系，比如，$y=x+1$，$y=3x-2$，$y=2x^2$等，都表示y和x之间存在一种函数运算关系．但是，y是x的平方根却不是一种函数关系，为什么，因为x的平方根有两个，结果并不是唯一确定的，所以y是x的平方根就不属于函数关系；但是如果我们说y是x的算术平方根，舍弃了负的平方根只留下正的平方根，结果就可以唯一确定了，于是我们就可以说y是x的函数．

当y和x的这种函数关系表现在平面直角坐标系上以后，就会以图形的方式展现出来．根据具体的函数形式不同，函数图象可能是一条直线，也可能是曲线，还可能是折线或者彼此不连续的一些松散的点，但无论如何，只要y的值能够随x唯一地确定，我们就可以认为y是x的函

数．（如图12－2所示）解析几何要研究的内容有两部分：一是从函数的表达式得到函数图象；二是根据函数图象得到一个确定的结果，或者根据一些松散的数据反算出函数的表达式．

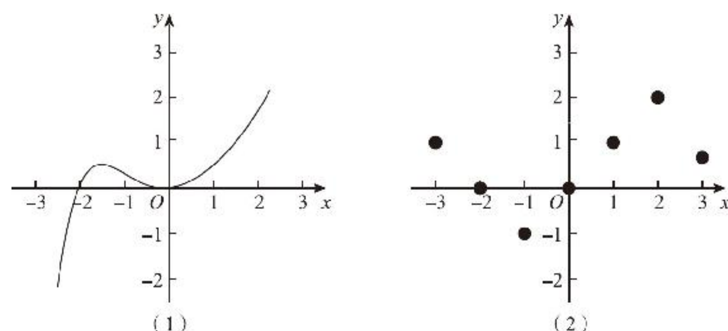
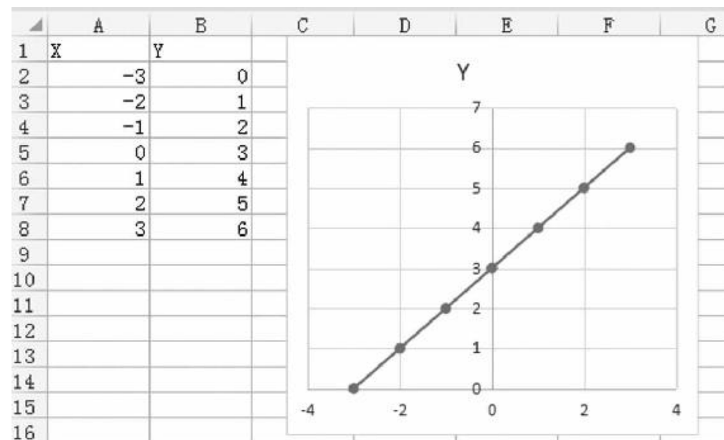


图12－2

电子表格可以帮助我们快速地把坐标数据转化为函数图象，如果你懂得电子表格的操作方法，在学习函数的时候，不妨多在电子表格中练习一下．可以用两列数字分别表示x坐标和y坐标的数值，然后生成这些坐标数据的函数图形，无论是微软的Excel还是国内的WPS表格都可以．具体操作方法如下：

打开电子表格后，默认会有一个空白的表格，在第一列开头写个x，第二列开头写个y．然后按照由小到大的顺序，先在第一列的单元格中输入一些数字，如－3、－2、－1、0、1、2、3，然后在和它对应的第二列中，直接输入公式．先输入一个等号，再把需要的公式输入进去，如果我们希望$y=x+3$，就可以先点一下左边的格子，然后再输入一个＋3，点击回车键，结果就会显示出来．为了快速计算出其他几组数据，还可以把带有公式的单元格快速复制粘贴到第二列的其他单元格中，于是，我们就生成了几组坐标数据．有了这些数据以后，我们再通过鼠标选中数据区域，然后点击生成图表按钮，选择那个自带平滑线的XY散点图，一幅函数图象就生成了（如图12－3所示）．通过这种方式，作图的效率大大提升．



X	Y
-3	0
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5
3	6

图12 - 3

关于函数，虽然已经做出很多解释，但仍然会存在很多疑问：

函数是一种数字类型吗？不是！

函数是一个变量吗？不是！

函数是一个方程式吗？也不是！

函数是一个图象吧？仍然不是！

◎ 函数就是加减乘除

函数是什么呢？函数就是加减乘除的组合．怎么样？这个答案是否出乎你的意料呢？函数怎么可能是加减乘除呢？别忘了加减乘除是世间万物的普遍规律．除了点、线、面以外，难道就没有别的方式来表示加减乘除了吗？现在答案终于出来了，这个答案就是函数！接下来我们就通过直角坐标系来感受一下函数的概念．

在解释加减乘除之前，先说一说最简单的等号，等号即是最简单的数学运算符号，又是最简单的函数运算形式．等号背后的逻辑非常简单，因变量y 直接等于自变量x ，比如穿过圆心的线段长度等于圆的直径．如何把$y=x$ 这个函数画在坐标轴上呢？首先，画出一个空的坐标系，在确定了原点和单位长以后，在横、竖两个坐标轴上标记出刻度；然后，从原点开始，分别向左、右两端描点，因为$y=x$ ，所以当$x=0$的时候，y 也等于0，那么，当x 等于其他数值时，y 的情况如何呢？为了清楚地描述它们的对应关系，可以在一个表格上把这些数据整理出来，当x 分别等于1，2和 - 1， - 2时，y 对应的数值如表12 - 1所示．

表12 - 1

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1	0	1	2

我们把这些坐标数据逐一描绘到坐标系上，最后再通过平滑的方式把他们连接起来．当我们把这些点连接起来以后就会发现，这是一条从左下角经过原点穿向右上角的斜线，这条斜线和x 轴、y 轴的夹角都是45°，经过这条斜线的切分，整个平面直角坐标系被均匀地平分成了两个部分．在这条直线上，我们可以发现：y 随着x 的增大而增大，随着x 的减小而减小．（如图12 - 4所示）每当我们指定一个x 的数值，就可以得到一个唯一确定的y 值，所以这两者之间符合函数关系．

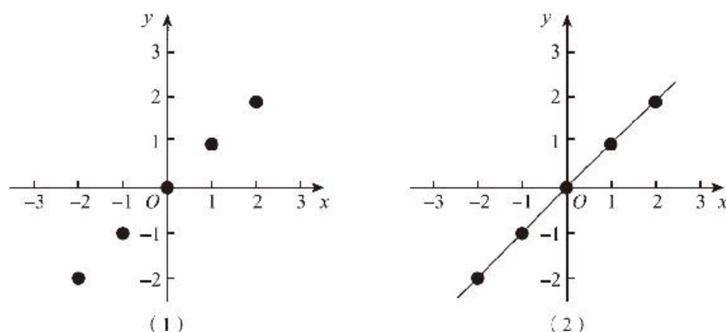


图12 - 4

说完了等号，接下来就该说加法了．加什么呢？$y = x$ 加上一个数字．就以$y = x + 2$为例研究一下这个问题，还是要重画坐标轴，重新描点连线．这个函数的坐标数字和函数图象如表12 - 2所示．

表12 - 2

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

我们不难发现，和上一个图象比，这条斜线沿着y 轴往上移动了2个单位长．它仍然是一条沿着45°方向倾斜的直线，只不过原来$y = x$ 的直线是经过原点的，现在这条直线沿着y 轴往上移动了2个单位长，它经过的y 轴上的点坐标为（0，2），同时因为向上移动了，导致它在往左下角延伸的时候，也扫过了x 轴上的（ - 2，0）这个点．（如图12 - 5所示）当然，要研究函数变化的规律，仅仅画出一条直线是远远不够的，如果你多画几条类似的函数图象，就会发现，y 等于x 加上几，这条直线就会沿着y 轴相应地移动几个单位长．

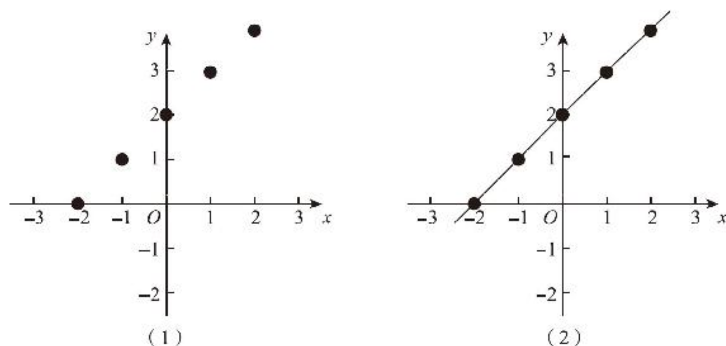


图12 - 5

按照同样的办法，我们尝试减法的规律：比如$y = x - 1$，如果把这条函数图象作出来就会发现，它仍然是一条直线，只不过沿着y 轴下移了1个单位长，x 减去一个数字相当于加上一个负数．（如图12 - 6所示）这个现象背后的道理非常简单，我们不做详细描述．

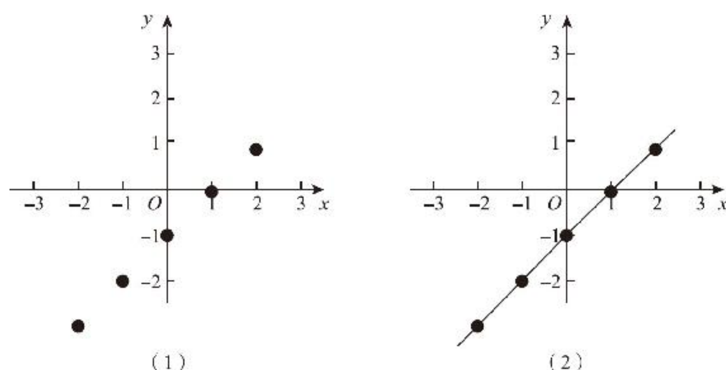
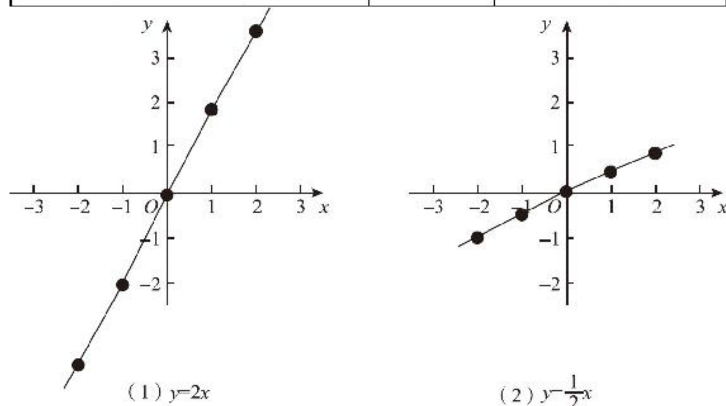


图12 - 6

讨论完了加减法，再看看乘除法．首先尝试一下作出$y = 2x$ 的图象，过程仍然是先整理坐标数据再描点．描点后连线就会发现，得到的仍然是一条直线，它与$y = x$ 的唯一区别在于，这条直线更靠近y 轴了，它和x 轴的夹角更大了．同样，如果我们把$y = x / 2$的函数图象画出来就会发现，这条线比$y = x$ 的曲线更加远离y 轴了，它和x 轴的夹角更小了．（坐标数据整理如表12 - 3所示；图象见图12 - 7）

表12 - 3

x	-2	-1	0	1	2
$y=2x$	-4	-2	0	2	4
$y=\frac{1}{2}x$	-1	-0.5	0	0.5	1



(1) $y=2x$　　(2) $y=\frac{1}{2}x$

图12－7

为什么会产生这样的效果呢？那是因为，和$y=x$相比，y的变化率发生了变化．什么叫变化率呢？就是说x每增大1，y相应地增加多少，在函数$y=x$中，x每增大1，y也随之增大1，所以它的函数图象就是稳稳的45°线．而在函数$y=2x$中，x每增加1，y却增大2，于是这条直线看起来就更加陡峭了．相反，在$y=\frac{1}{2}x$的图象中，x增大1个，y只增大0.5，因此直线的倾斜程度就要平缓得多．y的变化率直接决定了直线的倾斜度，因此y的变化率也叫斜率．而表示这一斜率的正是x的系数．这就是乘除函数产生的效果．

研究完了基本的函数图象特征以后，还可以进一步研究组合函数的特征．如果把$y=2x+1$的图象与$y=2x$的图象相比就会发现，两者的区别同样仅仅是沿着y轴移动了1个单位长而已．（如图12－8所示）

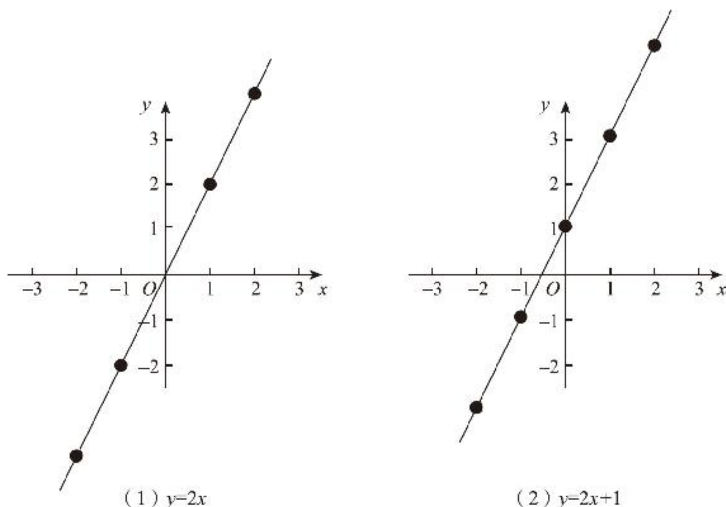


图12－8

因此我们可以认为，函数图象加减乘除的效应不但是独立存在的，而且是可以相互叠加的．无论函数图象的形状多么复杂，只要我们发现两个函数图象形状相同，只是上下的位置不同，我们就应该知道，两个函数之间存在着加减的关系．关于这部分内容，后面我们还会做更详细的介绍，这里只是通过这些实例初步感受一下函数图象的变化规律．函数其实并不神秘，它只是结合了代数表达式和几何图形的优势，让我们用更加直观的方式来管理变化着的数据，如此而已．

最后，我们仍然要解释一下函数的意义：既然函数就是加减乘除，那么，我们为什么还要发明函数这个概念呢？因为世界上最基本的运算关系就是加减乘除乘方开方，而在实际生活中，两个变量之间的运算关系却是复杂多样的．在这种情况下，我们不可能为每一种运算方式发明一种新的运算符号．以$y = 2x + 3$为例，x 和y 两个变量的关系中既有乘法又有加法，难道我们还能因此发明一个“乘加”运算符吗？不能，我们只能把天下所有的运算关系都归集到一起，为它们起一个统一的名字叫作函数．因此，我们也可以概括地说：函数只不过是运算关系的统称．

我们还可以把函数再做一个形象的类比，在现代化的工厂中，有很多全自动的智能装备，当我们把水果扔进一个饮料生产线以后，打包好的果汁就自动生产出来了；当我们把奶油扔进冷饮生产线以后，冰激凌就自动生产出来了．因此，我们也可以认为，函数就是一种自动处理数据的设备，我们只要把待处理的自变量扔进去，因变量的结果就会自动生成．在自动化工厂中，我们不用了解自动机械的原理，就可以使用它制作各类产品；同样，当我们使用函数的时候，也完全可以在不了解函数细节的情况下，用它解决实际问题．

◎ 线性函数：通过解析几何解决实际问题的方法

接下来，我们就把加减乘除在代数、几何和解析几何中的实现方式做一个详细的比较．

在代数学里，加减乘除的运算分别对应着多项式的展开、合并同类项、因式分解等操作，其中的因式分解是一个非常复杂的问题，而且我们一次计算只能得到一个数字．在几何学里，加减运算相对比较简单，但是乘除运算就需要用到相似三角形缩放的原理，实现起来很不容易，而且只能对线段乘除，角度是无法除的．在解析几何里，加减乘除对应的只是函数图象的移动和缩放操作，加减是图象沿着y 轴上下移动，乘除是图象沿着竖直的方向缩放．一条函数图象代表了无数组数据，根据一条函数图象轻松得出另一条函数图象的时候，等于得到了另一个函数的无数组对应数据．这就是笛卡尔灵光一闪，激动得跳起来的根本原因．

不过，把函数同加减乘除运算作比较，只是为了加深理解，从严格意义上讲，没有加减函数及乘除函数的说法．在研究函数的时候，通常都会按照变量的变化规律及函数图象的特征对函数进行分类，所谓加减乘除函数，因为函数图象都是一条直线，所以被统称为线性函数．线性函数又是一次函数，一般表达式为$y=\mathrm{k}x+b$，其中$\mathrm{k}\neq 0$，叫一次函数是因为自变量x 的次数是1．当$b=0$时，即表达式是$y=\mathrm{k}x$，此时函数图象是一条经过原点的直线，称为正比例函数．因此，正比例函数是一种特殊的一次函数．接下来分析一下线性函数的基本特征．

为什么线性函数的图象都是一根直线呢？因为x 的系数是固定的，因此每当x 增加1的时候，y 总是会增加一个固定的数值，而这个固定的数值又对应着这个直线的斜率，斜率不变，所以这个线就是一条直线了．在表达式$y=\mathrm{k}x$ 或者$y=\mathrm{k}x+b$ 里面，这个不变的斜率就是x 的系数k．不过，y 随着x 的增加而增加，指的是k是正数的时候；当k是负数的时候，y 就会随着x 的增加而减小．比如函数$y=-x$，它就是$\mathrm{k}=-1$的线性函数．如果把它的函数图象作出来就会发现，这个函数图象变成

了一条从左上角到右下角倾斜的直线，所以说当k＜0的时候，y 随着x 的增大而减小．（如图12－9所示）

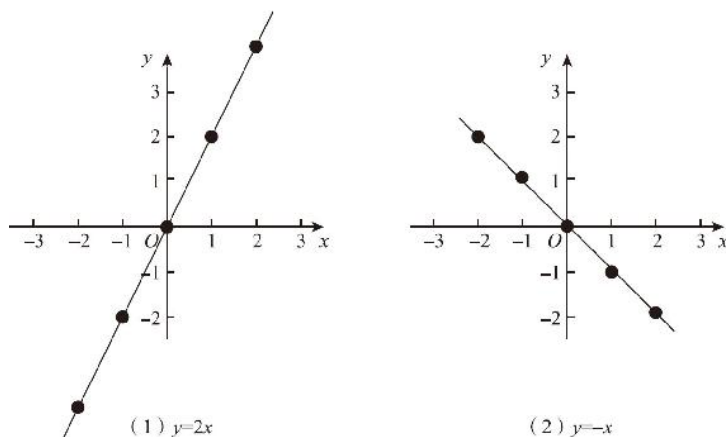
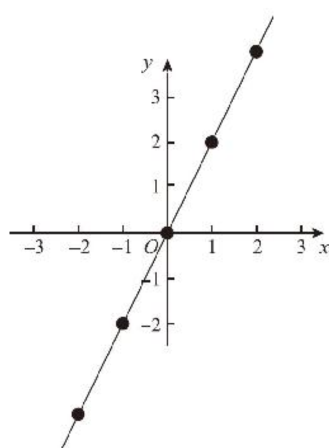


图12－9

k 本身有什么变化规律？当$k>0$的时候，k 越大，y 增加得就越快，这条直线就越靠近y 轴，直线的倾斜度就越大，坡度就越陡峭；k 越小，y 增加得就越慢，这条直线就越远离y 轴，直线的倾斜度就越小，坡度就越平缓．无论是正比例函数，还是一次函数都有这个特点．当$k<0$的时候，k 越大，直线越靠近x 轴，倾斜角越小；k 越小，直线就越靠近y 轴，倾斜角越大．请务必牢记这一点，千万不要以为正比例函数就一定是y 随着x 的增加而增加的，那得看x 的系数k 的正负才能确定．

最后，正比例函数和一次函数的区别是什么？从图象上看，正比例函数的直线是经过原点的，但一次函数的直线不一定经过原点，它会沿着y 轴移动一段距离．（如图12－10所示）从表达式上来看，它们唯一的区别就在于一次函数加上一个常数b ，加了这个常数以后，原来的那条直线就会沿着y 轴的方向上下移动．如果b 是正数，图象就往上移动；如果b 是负数，就会往下移动．因此b 就是在y 轴上移动的距离，因为它相当于在y 轴上截出了一段距离，所以把b 叫作一次函数的截距．一次函数$y=kx+b$ 也可以理解为：函数值＝斜率×自变量＋截距．以上就是线性函数的基本性质．



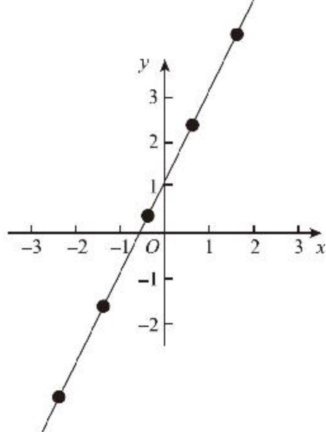


图12 - 10

在现实生活中，线性函数有什么用？接下来就用这个函数图象解决一个实际问题．

某公司今年计划盈利800万元，已经实现盈利600万元，每个月还能盈利50万元，请问几个月后才能达成目标？这是非常简单的一个问题，用这个800万元减去600万元，然后再除以50万元就可以得到结果．现在学习了解析几何，就需要换一种思路来解决问题．刚刚接触方程式的时候，曾经从算术思维过渡到代数思维，现在要想用好函数图象这个工具，需要从代数思维过渡到解析几何的思维方式．

如果用y 轴来表示公司赚的钱，单位是万元，用x 表示时间，那么公司赚800万元就是$y=800$，不管哪一天实现，不管x 是多少，y 都等于800，这样，我们就能在$y=800$的位置上，画出一条水平的线来，这就相当于公司的目标线，至于哪个月能达到，我们先不管，反正目标先定在这里了．接下来，我们再画出公司的实际利润线，现在公司有600万元，就先在y 轴的600这个地方描上一个点．同时，公司每个月还能赚50万元，如果我们用x 轴表示月份，那就是说，当$x=1$的时候，y 轴加上了50，变成了650，这时候，我们又得到了另一个点的坐标，那就是（1，650），我们知道每个月固定赚50万元，说明它的增长速度是均匀的，因此这是一个线性函数，它的图象是一条直线，又因为两点之间可以确定一条直线，所以，我们就可以把（0，600）和（1，650）这两个点连起来，这条斜线一作出来，它就和$y=800$的这条水平线产生

了一个交点，这个交点所对着的x　轴坐标，就是我们达到目标的具体时间．（如图12 - 11所示）以上就是通过解析几何来解决实际问题的方法．请你认真体会一下，这个过程是不是和几何作图的思路很接近呢？都是通过两条线找到一个交点．

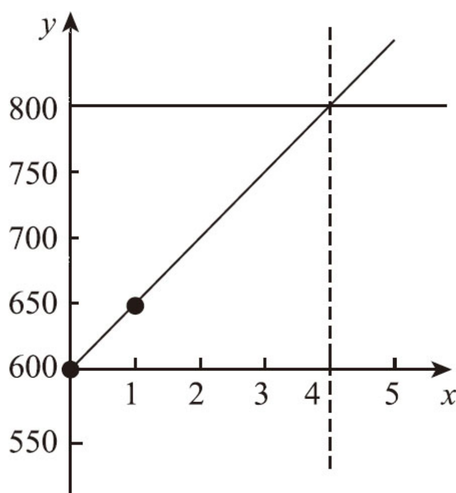


图12 - 11

不过，对于这个题目而言，通过这种方法解决，的确没有提供什么方便．本来一道简单的算术题，变成了几何图形以后，反而会越来越复杂了．不妨反过来想一下，如果这本来就是一道几何题呢？是不是就可以通过这种方法把它变成简单的算术了呢？没错，这就是解析几何的好处，当我们打通了几何和代数的壁垒以后，遇到实际问题时，怎么方便就怎么来．而且笛卡尔当年发明这个解析几何，主要就是通过代数方法解决几何问题的．要不然为什么把这门学问叫解析几何，而不把它称为图形代数呢？

◎ 线性函数的应用：代数问题和几何问题

学习了解析几何以后，我们就可以利用函数图象来把一个代数问题转换成一个几何问题．同时，由于这种转换是相对的，在遇到一个几何问题的时候，也可以当作代数问题来看待．比如：如图12 - 12所示，经过坐标系上两个点作一条直线，请问，这条直线和y 轴的交点坐标是什么？

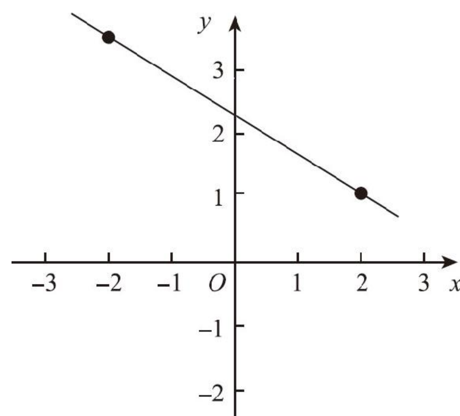


图12 - 12

很明显，这就是一个简单的几何问题，由于两点确定一条直线，既然两个点的坐标都有了，我们用直尺把它们连接起来不就可以了吗？可是，画完这条线你就会发现，自己很难精确指出坐标位置到底是多少．当直线与y 轴相交的点介于2.3和2.4之间时，谁能告诉我们，这个坐标值到底是2.32还是2.33呢？几何作图问题会受到精确度的限制，不能得出准确的结果．要想求得坐标的精确数值，就必须借助代数表达式的帮助，就必须把这个几何问题转换成代数问题，这也就是笛卡尔发明解析几何的主要目的．

接下来，我们就一起来分析一下这个问题：比如，题目给出的两个坐标点分别为（3，4）和（6，10）．那么，过这两点的直线会经过y 轴的什么位置呢？在坐标系中，直线对应的函数一定是线性函数，解析表达式一定只能是$y=kx+b$ 的形式，而且这条直线和y 轴的交点的纵坐标就是b ．理解了这一点以后，我们就可以根据两组坐标数字求得函

数中k和b的精确数值．

在这个世界上，似乎并不存在一成不变的东西，变化之中隐藏着不变的性质，不变之中隐藏着变化的规律．一个函数中的变量和常量也是如此：在$y=kx+b$这个函数表达式中，x和y应该是变量，k和b都应该是常数．但只是一个常识，具体问题还必须具体分析，比如，现在我们知道的两组数据就都是x和y的坐标数据，k和b的情况一概不知，所以此时就可以把k和b看成是变量，把x和y看成是常数，只要把x和y对应的两组坐标数据代入到$y=kx+b$中，就可以得到一个二元一次方程组，解出这个方程组，就不难求出k和b的值，因为k和b都是方程的系数，数值是暂时不确定的，所以这种求解方法，又叫作待定系数法．

待定就是等待确定，怎么确定？只能靠x和y的坐标数据来确定！

我们把（3，4）和（6，10）这两组坐标代入到$y=kx+b$中，就可以得到如下方程组：

$$\begin{cases}4=3k+b,\\10=6k+b,\end{cases}$$

两式相减，得到$3k=10-4=6$，

解得$k=2$，

再把$k=2$的结果代入到$4=3k+b$中，

得到$b=4-3k=4-6=-2$．

因为一次函数和y轴的交点纵坐标是b，所以我们就知道，它在这一点的坐标为（0，-2）．这样，我们就成功地通过代数方法求解了一个几何问题．

接下来，我们再处理一个问题：如图12-13所示，已知直线AB的函数表达式是$y=4x+2$，同时直线AB分别与x轴y轴相交于A、B两点，则AB和原点O之间的三角形AOB的面积是多少？让我们分析一下：由于x轴和y轴的夹角是直角，所以这个三角形的面积，可以通过x轴y轴上的两条直角边来计算．因此，我们只需要求出x轴与y轴上的交点坐标即可．y轴的交点很简单，因为线性函数的常数项就是y轴的截距，所以根据函数表达式$y=4x+2$直接就能得到，y轴的交点肯定就是（0，2），那么x轴的交点是多少呢？由于x轴上所有点的y轴坐标

都是0，所以x 轴上的交点，就是当$y = 0$的时候，x 的对应数值．完整的解题过程如下：

把$x = 0$代入$y = 4x + 2$，得到：$y = 2$，即$OB = 2$；

把$y = 0$代入$y = 4x + 2$，得到：$0 = 4x + 2$，

解得$x = -\frac{1}{2}$．即$OA = \frac{1}{2}$．

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

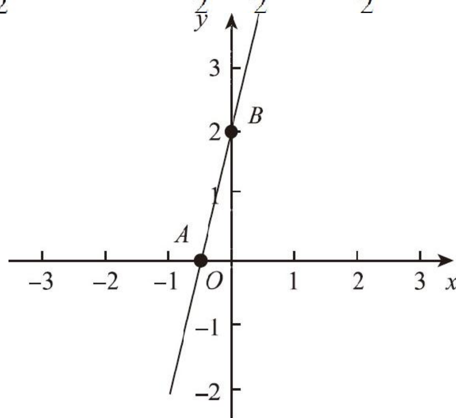


图12 - 13

上述问题都是通过求解直线和坐标轴的交点来解决的，当任意两条直线相交时，它们的交点坐标又应该如何求解呢？以下面的问题为例：如图12 - 14所示，两条直线e_1 、e_2 相交于点E ，已知两条直线的函数解析式分别为$y = ax + b$ 和$y = cx + d$ ，求E 点的坐标．

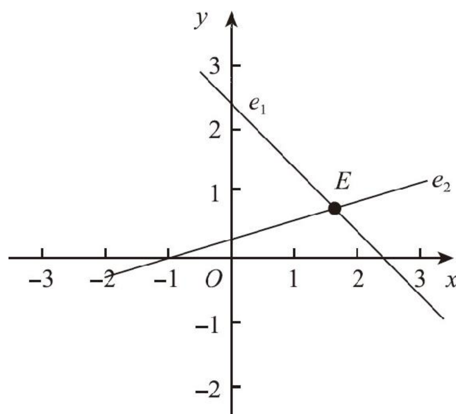


图12 - 14

既然是两条直线的交点，说明它应该既在第一条直线上，又在第二

条直线上．也就是说，这个点既满足第一个函数的要求，又满足第二个函数的要求．这就意味着当x 等于某一数值的时候，两个函数的y 值是相同的，因此，我们只需要把这两个函数式当作方程组联立一下方程，就可以求出x 的数值．具体过程如下：

$$\begin{cases} y = ax + b, \\ y = cx + d, \end{cases}$$

两式相减，得到：$(a - c)x = d - b$，

解得：$x = \dfrac{d-b}{a-c}$，

代入$y = ax + b$，得到：$y = \dfrac{ad-bc}{a-c}$．

$\therefore$当$a \neq c$ 时，E 点的坐标为$\left(\dfrac{d-b}{a-c}, \dfrac{ad-bc}{a-c}\right)$，

当$a = c$ 时，两直线平行，无任何交点．

十三　二次函数

◎勾股定理：代数知识和几何知识的巧妙结合

通过解析几何的帮助，可以把几何问题转换为代数问题，但这并不意味着几何学只能处于从属地位．有一个看起来极其简单的问题，必须依靠几何的帮助才能解决．这是一个什么问题呢？求取任意两点间的距离，比如（2，3）到（5，7）这两点之间的直线段的距离等于多少？假如我们把这两点的坐标画出来就会发现，这两点之间的连线，它既不是水平的，又不是垂直的，它和x轴、y轴都有一个夹角．在这种情况下，用代数方法求解，只能拿一根尺子量一量．用几何方法，只能叉开圆规测量一下，再到坐标轴上去对比，仍然得不到精确结果．要想解决这个问题，必须要靠代数与几何通力合作才行．接下来我们就一起来分析．

两点之间的连线是斜线不要紧，我们可以先把它转换成两条直线，首先，我们经过（2，3）这一点作一条x轴的平行线，然后再过（5，7）这一点作一条y轴的平行线．（如图13－1所示）于是，在这两条平行线和斜线之间就形成了一个直角三角形：三角形水平的直角边的长度，等于两点横坐标的差；垂直的那条直角边的长度，等于纵坐标的差．经过计算不难得出，该直角三角形的两条直角边的长度分别是3和4，它的斜边长度就可以求得了．此时，需要借助几何学，来探究一下直角三角形的三边关系．

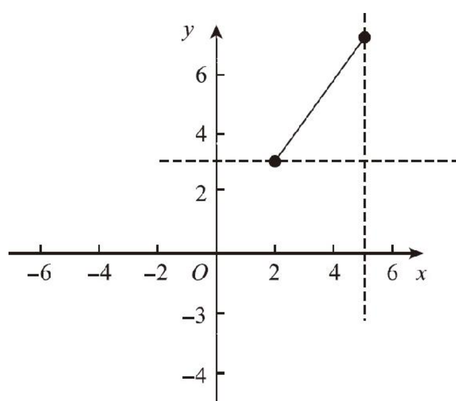


图13 - 1

首先，我们假设这个直角形的两条边的长度分别是a 和b ，再假设它的斜边长度是c ，现在我们就试一试，看看这个c 能不能通过a 和b 的加减乘除来表示．为了研究这个问题，我们可以把四个同样的直角三角形首尾相接，拼合成如图13 - 2所示的形状．

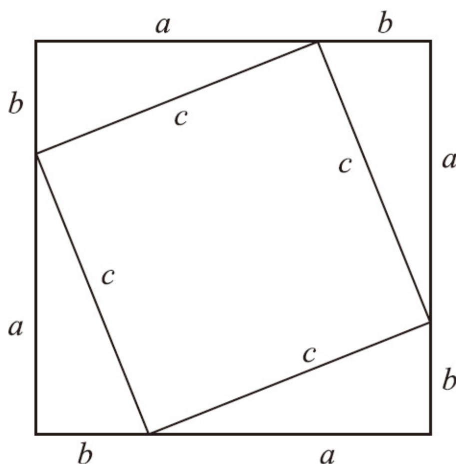


图13 - 2

如图13 - 2所示，当四个直角三角形斜边朝内摆在一起时，中间和外围刚好拼成了两个正方形，内部的正方形边长就是原三角形的斜边c ，外围的正方形边长正好就是原三角形的两个直角边a 与b 的和．那么，这两个图形真的是两个完美的正方形吗？是否任意四个直角三角形都能拼合为这样形状呢？让我们来分析一下．

首先，外围正方形的四个角都是原三角形的直角；其次，两条直角

边a和b是可以拼合成一条直线的；最后，当四个边长都是$a+b$的时候，我们就组成了一个四边相等、四个角都是直角的四边形．因此，外围的图形一定是正方形．那么内部的四边形呢？首先，我们可以知道它的四边都等于斜边c的长度；其次，它的四个角度都等于平角先后减去直角三角形的两个锐角．由于直角三角形两个锐角之和一定等于90°，所以它的四个角也一定是直角．所以，内部的图形也一定是正方形．于是，我们就可以根据这几个图形的面积关系，推断出直角三角形的三边关系了．

根据图示，内部的正方形面积等于外围的正方形面积减去四个直角三角形的面积．

$$(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab=c^2,$$

左式展开，得到$a^2+2ab+b^2-2ab=c^2$，

化简，得到$a^2+b^2=c^2$．

也就是说，在任意一个直角三角形中，斜边平方等于两个直角边的平方和．早在数千年前，古代中国、古代希腊和古代印度的数学家们都曾经独立地发现了这个定理．按照中国的传统习惯，我们常把直角三角形中，较短的一条直角边叫作勾，较长的直角边叫作股，直角三角形的斜边叫作弦，所以这个定理又被叫作勾股定理．据说这个定理的证明方法有400多种，但要证明这个定理，必须要依靠代数知识和几何知识的巧妙结合．当然，这个定理的完整证明是古希腊的毕达哥拉斯首先完成的，因此西方普遍把这个定理称为毕达哥拉斯定理．

证明了勾股定理以后，我们就可以计算平面上任意两点之间的距离了．在刚才的题目中：直角三角形的两条直角边分别是3和4，假设斜边长是c，根据勾股定理可知：

$$a^2+b^2=c^2,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}$$

$$=\sqrt{25}$$

$$=5$$

3、4、5，多么和谐的一组数字啊，在我们中国，勾三股四弦五一直就是对勾股定理的简称．但可惜的是，并非所有的整数都符合勾股定理的这种关系，我们把符合这种条件的整数叫作勾股数，这些数字除了3、4、5之外，还有5、12、13，当然，它们的整数倍同样符合平方和的这种关系，但是大部分的整数就没这么幸运了，比如，两个直角边都等于1的直角三角形，它的斜边长度就等于$\sqrt{2}$，倒霉的希帕索斯就是因为这个$\sqrt{2}$的问题白白牺牲了．

不过，勾股定理带给我们一种通过几何作图求解无理数的办法：可以不断在纸上作出一个个如图13－3所示的直角三角形，这样所有自然数的平方根就依次展开了．

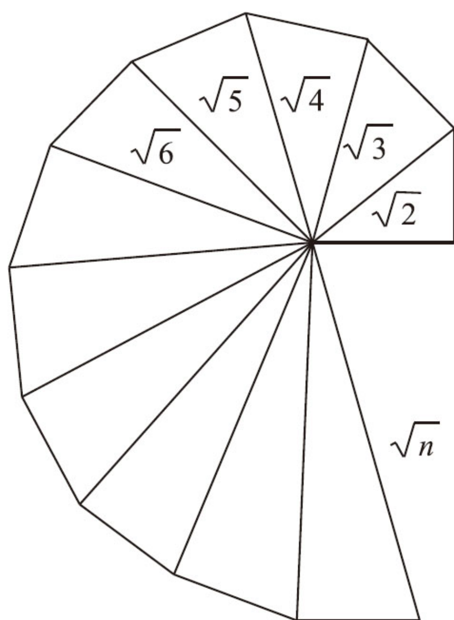


图13－3

首先，我们通过两个边长为1的直角三角形，就可以得到一条长度为$\sqrt{2}$的斜边c_1，然后我们再以$\sqrt{2}$作为一个新的直角边，垂直于它继续作出一个边长为1的直角边，于是新的直角三角形的斜边长度$c_2^2=(\sqrt{2})^2+1^2$，因此新的斜边长度就是$\sqrt{3}$，随后再次重复上述过程，就可以依次得到$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，…，$\sqrt{n}$，随着这些三角形的斜边越来越长，这些三角形会形成一条漂亮的螺旋曲线．

通过勾股定理的证明过程，我们可以感受到几何学和代数学融合以后产生的巨大威力．那么，对于相对复杂的二次函数，解析几何又能提供哪些帮助呢？

◎ 二次函数曲线：解析几何能提供哪些帮助

先来看一个最简单的二次函数$y=x^2$．为了了解这个函数的基本特征，先从基本的描点连线绘图开始．首先，画出一个空的坐标系；然后，依次计算出准备描的点的坐标数据，由$y=x^2$得到表13-1所示的坐标数据．

表13-1

x	−2	−1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

通过坐标数据描点连线完成后，我们发现，$y=x^2$的函数图象是一条U形曲线，它的最低点经过原点，左右对称并且开口向上，在$x>0$的情况下，随着x的逐渐增大，y的增大速度会变得越来越快，因此，这条曲线的倾斜度会越来越陡．（如图13-4所示）这就是一条典型的二次曲线，由于它和物体在重力场中抛落的轨迹高度相似，因此二次曲线又被称为抛物线．

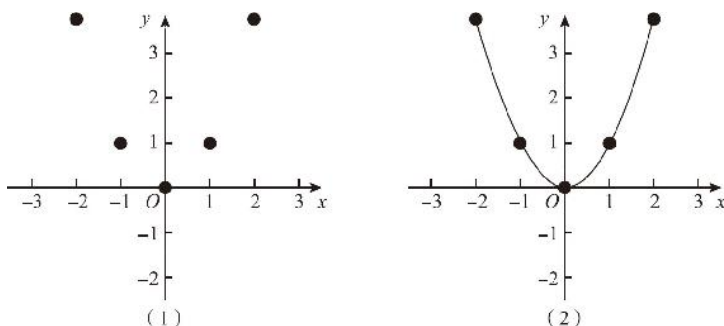


图13-4

接下来，在二次函数形的抛物线上，再次体验一下加减乘除的作用．首先，加减的作用可以让函数图象沿着y轴的方向上下移动，如果我们绘制出$y=x^2+1$的图象就会发现，函数图象果然是向上移动了1个单位长度；同样，如果我们绘制出$y=x^2-2$的图象也会发现，函数图象就向下移动2个单位长度．（如图13-5所示）由此可见，加减的移动变换效应可以独立发挥作用，无论是一次函数还是二次函数，它们的效

果都是相同的．

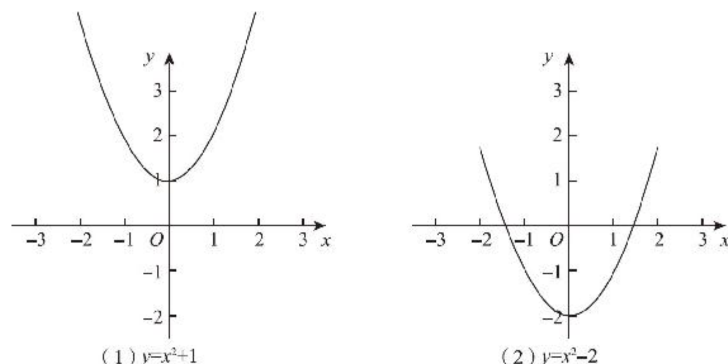


图13－5

同时，乘除的效果会改变y的变化率，导致函数图象在竖直方向上拉伸和压缩．如果我们作出$y=2x^2$的函数图象就会发现，抛物线的开口变窄了，这是因为x^2的系数增大以后，y增大的速度变快了，虽然抛物线是一条曲线，但是与$y=x^2$相比，开口变窄同样意味着曲线变得更陡了，它的本质和改变一次函数直线的斜率没有差别，同样意味着在y轴方向上进行了拉伸放大的作用．同样，如果我们作出$y=\frac{1}{3}x^2$的函数曲线，就会发现，抛物线的开口变大了，曲线变得比原来更平缓了，这意味着函数图象沿着y轴的方向被压缩了．对于一次函数而言，y轴的拉伸就意味着直线的斜率变大；对于二次函数而言，y轴的拉伸就意味着抛物线的开口变窄，y轴的压缩就意味着抛物线开口变大．（如图13－6所示）

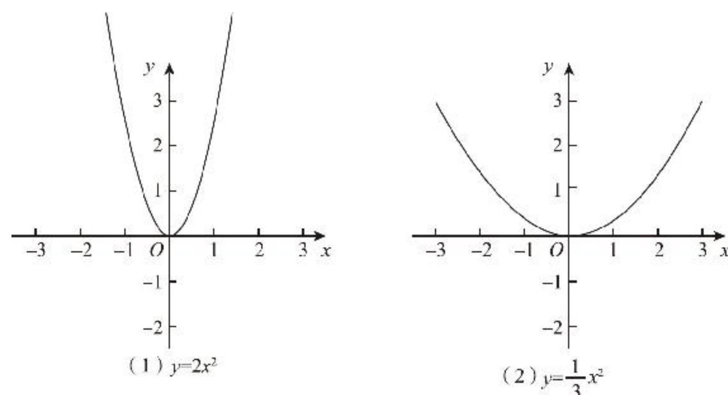


图13－6

最后，我们绘制出$y = -x^2$的函数图象就会发现，当x^2的系数变为负数以后，虽然函数图象的形状没有改变，但是与$y = x^2$相比，抛物线上下翻转，变得开口向下了．此时，如果我们再次尝试$y = -2x^2$的函数图象就会发现同样的结果．（如图13－7所示）

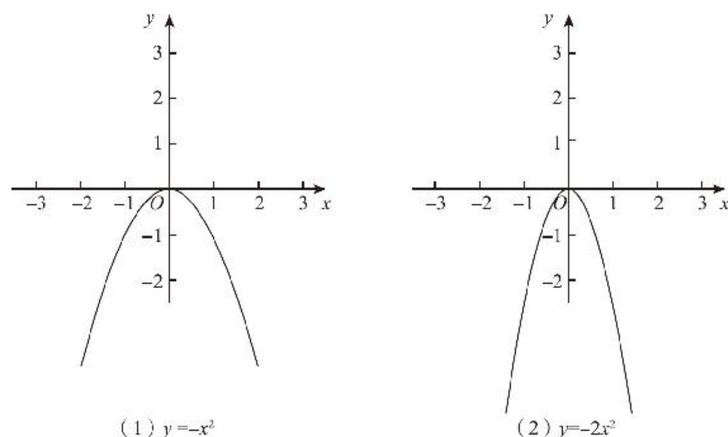
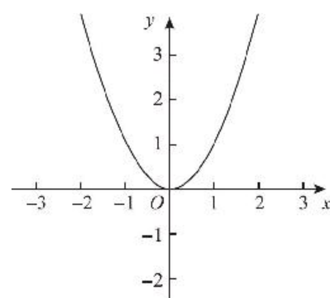


图13－7

通过上述过程，我们不难发现：对于任何一个函数$y = ax^2 + c$而言，改变a的绝对值的大小，只会影响抛物线开口的大小，a的绝对值越大，抛物线的开口越窄；a的绝对值越小，抛物线的开口越大．改变a的正负，只会影响抛物线开口的方向，当$a > 0$时，抛物线开口向上；当$a < 0$时，抛物线开口向下．改变常数项c的值，只会影响抛物线上下的位置，当$c > 0$时，抛物线沿着y轴向上移动；当$c < 0$时，抛物线沿着y轴向下移动，但无论如何移动，抛物线始终是在y轴的左右两侧严格对称的．

那么，为什么抛物线不能左右移动呢？我们知道，一个标准的二次函数不仅要有二次项和常数项，还应该有一次项，它的表达式应该是$y = ax^2 + bx + c$．如果我们在$y = x^2$的基础上加上个一次项，变成了$y = x^2 + 2x$，函数图象又会发生怎样的改变呢？

抛物线的开口大小一点都没变，反倒是位置发生了移动，不但垂直位置移动了，而且水平位置也改变了，抛物线不在y轴的两侧对称了，对称轴移动到了y轴的左侧．（如图13－8所示）



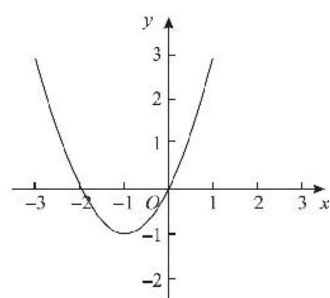


图13 - 8

◎ 抛物线的移动

在研究线性函数$y=x$ 的函数图象时，如果在这个函数的基础上加上一个数字以后，$y=x$ 的这条直线会沿着y 轴上升，如果你留心观察就会发现，$y=x$ 的这条45°斜线向上移动的同时，其实也是向左移动了，移动之前它与坐标轴的交点是（0，0），如果把它向上移动1个单位长，变成了$y=x+1$以后，它就会和坐标轴相交于两个点，此时它不但会经过y 轴上的（0，1）这个点，而且会经过x 轴的（-1，0）这个点．（如图13-9所示）

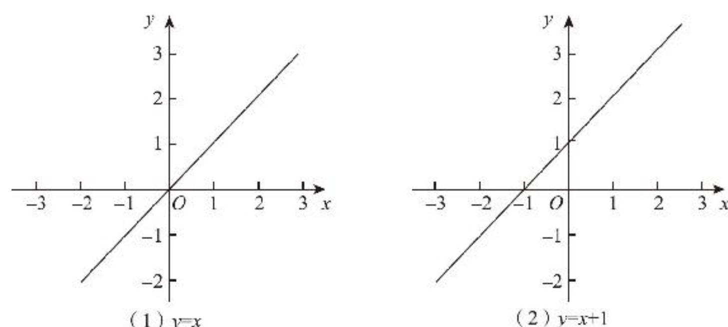


图13-9

既然一条直线同时向左和向上发生了位移，为什么只强调它向上运动呢？对于这样一根两端无限延长的直线而言，无论是向上移动还是向左移动，最终达到的效果都是相同的．如果只在$y=x$ 的这条曲线上讨论这个问题，结论永远是说不清楚的，要想明白这个问题，还要看看一次函数的曲线．我们知道，一次函数的解析式是$y=kx+b$ ，如果保持k的值不变、更改b 的数值，我们就会发现，b 增减多少，原来的直线就顺着y 轴的方向上下移动多少，比如$y=2x+1$与y 轴的交点是（0，1），而$y=2x+4$与y 轴的交点就是（0，4）了，毕竟我们知道b 代表的是y 轴的截距，所以有这个情况也并不意外，但关键在于，当直线在y轴移动的时候，它也会同时在x 轴上移动，$y=2x+1$与x 轴的交点是（-0.5，0），而$y=2x+4$与x 轴的交点就是（-2，0）了．（如图13-10所示）虽然直线在x 轴上移动的位置不多，但毕竟也发生了移动，那么函数图象在x 轴上的水平移动到底符合什么规律呢？

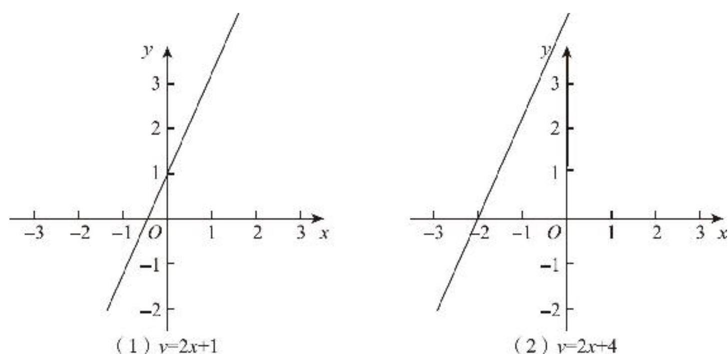


图13 - 10

在一次函数中，直线的位置之所以随着y 轴上下移动，并不是因为y轴有什么特殊优势，而仅仅是因为计算顺序的不同．在函数$y=kx+b$中，函数是先计算乘法后计算加法，如果我们把这个顺序颠倒过来，把函数变成$y=k(x+b)$，你就会发现，一次函数不再严格地随y 轴移动，而是变成随x 轴移动了．只不过，它的移动和原来y 轴的移动正好相反，在函数$y=kx+b$ 中，b 越大，直线越往上移动，直线与y 轴的截距越大，但是在函数$y=k(x+b)$中，b 的值越大，直线就越往左移动，直线与x 轴的交点就越小．这是为什么呢？

对比一下$y=kx$ 与$y=k(x+b)$就会明白了．新函数中的$x+b$，相当于新的函数中的x，这就意味着，如果原来的函数$x=0$时$y=0$，那么新函数就要在$x+b=0$的情况下，y 的值才等于0了．$x+b=0$，当然x 就等于$-b$ 了．但是，为什么x 轴和y 轴移动的方向相反呢？按道理说不是应该是加变大，减变小吗？可是$y=k(x+b)$的情况偏偏是，加一个数x 轴的交点变小，减一个数x 轴的交点反而变大．这又是为什么呢？

如果把$y=kx+b$ 变个形就会得到：$y-b=kx$．原来的加b 会变大，那是因为它在等式右侧，因为是在自变量x 的数值上加的，如果把b通过移项挪到等式左边以后，它是减法．当然，函数表达式不是方程式，我们把常数项移动到等式左侧，只是便于理解．明白了这一点，就彻底明白了函数移动的基本规律．

对于任何一个函数而言，如果我们在函数计算前，先在x 后面增减一个数值，函数就会发生左右移动，增加一个数值向左移动，减去一个

数值向右移动．而在函数计算完成后再增减一个数值，函数就会发生上下的移动，增加一个数值向上移动，减去一个数值向下移动．这是所有函数的普遍规律，一次函数是这样，二次函数同样是这样．我们可以实验一下$y=(x+1)^2$的函数图象，让x先加1，加完以后再平方，这样得到的曲线，和$y=x^2$相比，由于x增加了一个数值1，所以整个曲线就会向左移动1个单位，原来抛物线沿y轴对称，现在呢，挪到了$x=-1$的这根竖直的线上．（如图13－11所示）通过上述分析，我们终于讲明白了抛物线左右移动的根本原因．

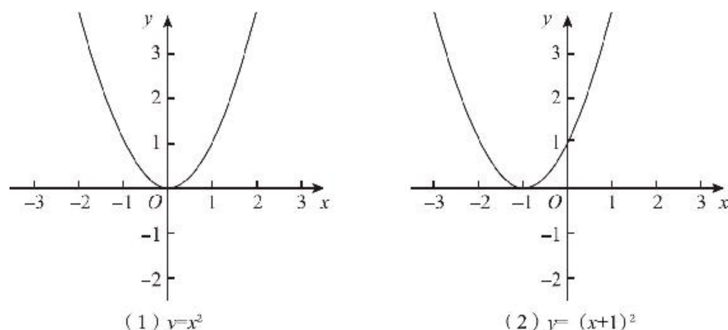


图13－11

也就是说，对于函数$y=a(x+n)^2+c$而言，a决定了抛物线的开口方向和大小，n决定了抛物线的左右位置，c决定了抛物线的上下位置．但是，对于标准函数$y=ax^2+bx+c$而言，b又代表了哪些含义呢？其实，只要采用配方法，强制把它配成$y=a(x+n)^2+c$的形式就可以了．

$y=ax^2+bx+c$，

提取系数a后，得到$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$，

利用一次项系数$\frac{b}{a}$的一半配方，

得到$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$．

最后我们得到了与$y=a(x+n)^2+c$完全一致的形式，只不过，在这个表达式中，n变成了$\frac{b}{2a}$，常数项变成了$c-\frac{b^2}{4a}$．于是我们知道，标准二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象是这样一条抛物线：它的开口大小和方向由a确定，它的对称轴是$x=-\frac{b}{2a}$，同时，它的顶点的坐

标为：$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$．在二次函数图象中，顶点的位置代表了函数的极值，当$a>0$时，抛物线开口向上，顶点在它的底部，此时函数拥有最小值；当$a<0$时，抛物线开口向下，顶点成了函数的最高点，因此函数拥有最大值；而且仅当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数才能达到这个极值．

通过函数图象得到的结果不止这些．根据a、b、c的取值范围不同，二次函数的曲线与x轴的交点分为三种情况：第一，当$b^2-4ac>0$时，抛物线和x轴存在两个交点；第二，当$b^2-4ac=0$时，二次函数的极值等于0，它和x轴就只有一个交点；第三，当$b^2-4ac<0$时，抛物线和x轴完全没有交点．（如图13－12所示）

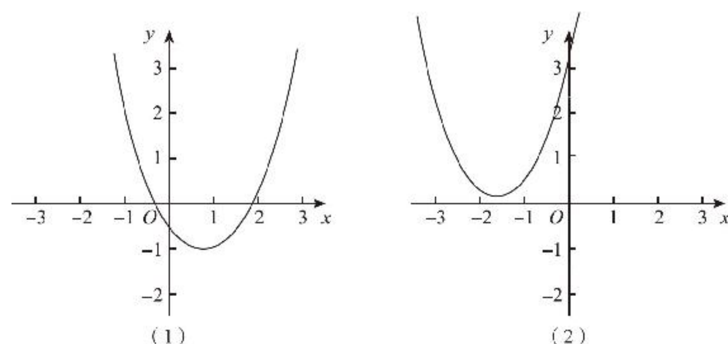


图13－12

x轴上的所有点的纵坐标都等于0，如果二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴存在交点，就意味着$ax^2+bx+c=0$这个方程式有解，而交点的个数就意味着解的个数．这样的高度契合使我们相信，几何图形和代数表达式只不过是同一个硬币的正、反两面，它们的融合绝不是偶然的，而是隐含着某种必然的规律．

十四　函数变换

◎ 函数的加减法

如果不是在函数的基础上加减一个数字，而是再加减另一个函数，又会发生哪些变化呢？

先从最简单的函数开始：比如$y=x$的函数和$y=2$的函数相加以后，结果会是怎样呢？首先，我们先在坐标轴上画一个$y=x$的函数图象，然后再画一个$y=2$的函数图象．$y=x$的函数图象我们已经非常熟悉了，它就是经过原点的一条45°直线；$y=2$的函数图象也很简单，它就是一条和x轴平行的水平直线，在这条直线上，无论x的数值是多少，y的数值都等于2．现在，这两个函数图象作出来了，把它们加在一起，一条斜线加一条直线等于什么？等于两条相交线吗？不对！真要把它们加在一起，我们必须要把两条函数图象上边所有点对应的数值都加起来．

我们知道，函数表示的是y随着x的变化而变化的结果．因此函数相加就意味着，我们要把函数中每一个点的y值对应地相加起来．比如，当$x=0$的时候，$y=x$这个函数上，$y=0$，我们管它叫y_1吧，$y=2$的这个函数呢，$y=2$，我们管它叫y_2，那么这两个函数图象相加以后，新的点会在哪儿呢？就应该在y_1+y_2的位置上，$0+2=2$，所以新的函数图象肯定是经过（0，2）这一点的．如果按照这个规律继续分析，我们就会发现：当$x=1$的时候，$y_1=1$，$y_2=2$，所以新的y就等于3，按此规律类推，我们就可以不断地从x轴上的一点出发，作出一条垂线来，先看看它和第一个函数的交点，再看看它和第二个函数的交点，然后，把这两条垂线段相加，就可以得到一个新的点．也就是说，所谓两个函数的图象相加，就是分别看看这两个函数图象上的每一个点距离x轴有多远，然后把它们的距离加起来．当我们陆陆续续作出来很多点以后，再把这些新的坐标点连接起来，就发现这个曲线正好就是$y=x+2$的那条直线．（坐标数据如表14－1所示）

表14－1

x	-2	-1	0	1	2
$y_1=x$	-2	-1	0	1	2
$y_2=2$	2	2	2	2	2
$y=y_1+y_2$	0	1	2	3	4

这个道理很简单，$y=x$ 和$y=2$相加的结果，不就是$y=x+2$吗？不过，如果我们从图象上看，结果就会更加简单明了：与x 轴相比，$y=2$的函数图象，本来就是比x 轴增高了2个单位长，所以两个函数图象相加的结果，肯定也就会是在原来的图象基础上上移2个单位．（如图14－1所示）那么，这个规律会不会只适合于常数呢？

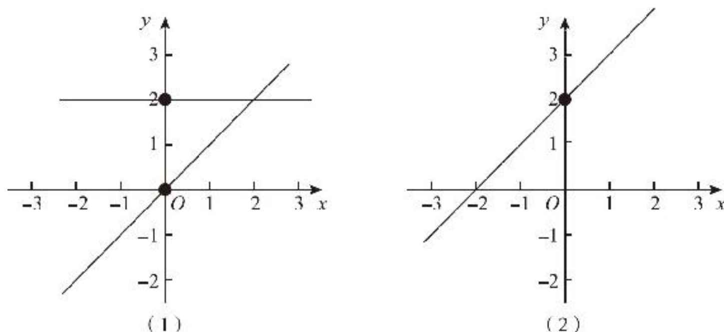


图14－1

接下来，我们继续看一看两个线性函数相加的结果：

如果$y=2x$ 和$y=x$ 两个函数相加，会是什么结果呢？我们仍然严格按照描点连线的方式绘制出函数图象：$y=x$ 的图象就是标准的45°斜线，而$y=2x$ 的直线倾斜角度比较大．我们把这两条直线相对应的纵坐标的数值相加，得到了一条新的直线，通过描点作图我们发现，最终得到的新的直线正好就是$y=3x$ ．对于这条直线，我们怎么理解呢？可以认为这两条直线和x 轴相比，都按逆时针方向往左转了，相加以后就会旋转过一个更大的角度，于是我们就得到了$y=3x$ 这条坡度更大的直线．（如图14－2所示）接下来我们再看看二次函数和一次函数相加的结果：

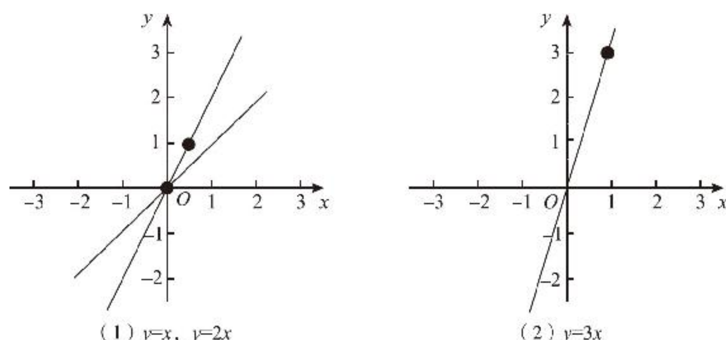


图14 - 2

我们知道，$y=x^2$ 的图象是一条抛物线，$y=2x$ 的图象是一条直线，那么两者相加的结果如何呢？在前面我们已经尝试了，$y=x^2+2x$ 的曲线仍然是抛物线，只不过它的对称轴会向左移动，会变成 $x=-\frac{b}{2a}$，函数的顶点会移动到 $y=c-\frac{b^2}{4a}$ 的位置上，由于 $a=1$，$b=2$，$c=0$，不难得出新的对称轴就是 $x=-1$，顶点坐标为（-1，-1）.（如图14 - 3所示）如果从函数图象的角度来解释，这一切的结果又是为什么呢？按照直观的方式理解，函数相加的结果不应该是抛物线变窄或者旋转过一个角度吗？

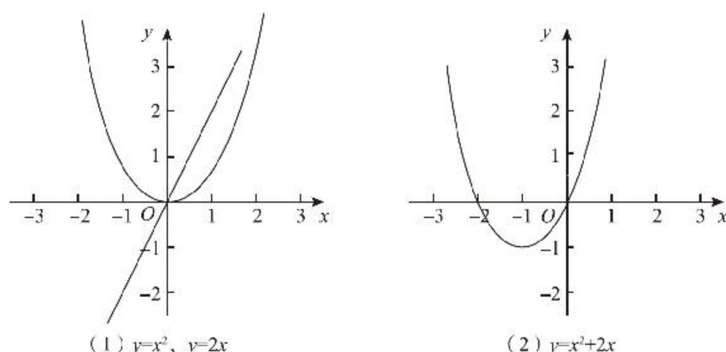


图14 - 3

仔细分析一下两个函数的图象就明白了：在两个函数图象中，先看 $x>0$ 的这部分图象，就会发现，$y=x^2$ 是大于0的，y 随着 x 的增大而增大，同样 $y=2x$ 也是大于0的，y 也会随着 x 的增大而增大，因此，这两条函数图象相加的结果，确实是一条坡度更陡的曲线，这样的结果完全符合我们的直观认识，无论我们把它理解为函数图象被拉伸了还是往左旋转了一个角度，都是合理的.

再看$x<0$的这部分图象立刻就全明白了，函数$y=x^2$的左半边仍然是大于0的，但是$y=2x$的左半边却是小于0的，而且，在靠近$x=-1$的这一段曲线当中，函数$y=x^2$上升的坡度非常缓慢，同$y=2x$下滑的幅度相比，y增加的部分太小了，于是这就导致了这两条曲线相加的结果是小于0的，这就是函数图象整体下移的原因．不过$y=x^2$毕竟是二次函数，如果我们从右往左看，当经过$x=-2$这一点以后，y增加的速度就越来越快了，于是两个函数相加的结果又变成了大于0的，因此这个曲线就和x轴有了两个交点，一个交点是（-2，0），另一个交点就是原点（0，0）．

最后，如果我们再仔细观察一下抛物线和斜线相加的结果，就会产生一个这样的感觉，好像$y=x^2$这条抛物线，站在了$y=2x$的斜面上，但由于它的脚底又圆又滑，结果导致两者相加的时候站不稳，往左下角滑了那么一小段，这就是二次函数和一次函数相加的结果．

◎ 函数变换的本质：各自发生毫无影响的自然规律

实际上，不仅两个函数可以加减，很多个函数图象相互交织在一起，同样可以通过纵坐标实现加减运算．为什么要反反复复折腾函数的加减法呢？隐藏在代数几何背后的那个秘密又是什么呢？

首先，所有的函数、变量、图形及加减乘除的运算，全部源于实际生活中的一些问题，源于客观世界中的某种现象．无论这些函数表示的是时间、速度、距离，还是长度、面积、体积，都不是无中生有的数字游戏，而是对这个世界的抽象模拟，因为这个世界的运动变化都是有规律的，我们才能从中抽象出优美的几何曲线，抽象出简洁的代数算式．在这里玩函数图象和你在手机上玩的游戏没有本质区别，都是一种现实世界的模拟．只不过，数学的抽象程度更高、应用范围更广、价值更大而已．

其次，虽然这个世界的运动变化是有规律的，但是发生在我们身边的大多数现象却又是混乱无序的．那是因为每一件事情的背后，都有很多的规律在同时发生着作用．无论是物质世界还是人类社会都是如此：对于物质世界而言，一个在马路上飞驰的汽车，不仅受到发动机的推力作用，而且会受到地面的摩擦阻力，还会同时受到侧向风力的影响．当多个规律同时施加在一个物体上的时候，它到底应该受哪个规律的支配呢？同理，对于人类社会而言，当一个人在做事的时候，既要考虑自身的利益，又要考虑对其他人的影响，还要考虑法律法规和道德规范的约束，还会受到自己民族习惯的影响等，到底应该坚持怎样的原则呢？我们反反复复地研究函数加减乘除的规律，目的就是解决这些问题．因为每一个简单优美的函数图象都描述了某一规律的作用，而它背后的代数解析式，就是这种规律的数学表达．当多个规律同时出现的时候，坐标系上就出现了多条函数图象，对这些函数图象的研究，就是对自然规律的把握．通过一个函数图象，可以认识一种规律；通过多个图象的组合，能够理解多个规律共同作用的效果．

学习了函数图象的加减法以后，就可以在没有函数表达式的条件下

计算两个函数的共同作用．比如，对于一辆汽车而言，我们知道了换一个轮胎对车速影响的函数图象，又知道了换一种润滑油的影响规律，于是，我们只要把两个函数图象叠加起来，就可以得出两者共同作用的结果．不仅如此，函数相互独立的这种性质，还可以让我们从一个复杂的函数图象之中，分解出多个相互独立的函数．比如，我们在欣赏几十种乐器合奏的交响乐的时候，虽然乐器的声音混响在了一起，我们仍可以轻松地识别出任何一种乐器的曲谱．

数字的加减、变量的加减、函数的加减，所有这些试验都明明白白地告诉我们：世界上所有的自然规律都在毫无影响地各自发挥着自己的作用，这就是隐藏在代数和几何背后的更本质的规律，它是一切规律背后的总规律．比如：当汽车的动力系统与空气的阻力相遇的时候，动力系统无须做出改变，空气的阻力函数也无须改变，它们各自发挥作用的结果，就是车速的函数．我们学了函数的加减法，就可以知道，世界上的规律虽然多，但是它们交织在一起的时候，都可以毫无影响地独自发挥作用．我们在函数图象的叠加规律中也可以清晰地看到这一点：在函数图象相加时，用的是几何法则；在解析表达式相加时，用的是代数语言，两者毫无影响地各自发挥作用，最后的曲线却在无声无息之中完美地契合在一起，与其说这是数学之美，不如说这是数学家把世界之美以一种优雅的方式表达了出来．

科学之所以称为科学，就是因为它是分科之学．为了研究各个领域内部的规律，就必须把它们放到各自独立的领域中去研究，这就相当于从一个复杂的函数中拆分出独立的函数曲线，一旦我们掌握了函数变化的特征，就意味着我们认识了这种客观规律，又可以把这些学问组合起来，投入实际的生产生活中去．这就是函数加减变换带给我们的启示．

◎ 函数的乘法和灯塔背后丰富的世界

说完了函数的加减，再说说函数的乘法．一个函数乘以另一个函数的结果是什么呢？先简单看一下函数相乘的几何意义．在几何语言里，线段相乘的含义有两种：一种是两条线段垂直相交，组成了一个长方形，两者相乘的结果就是这个长方形的面积；另一种是把一条线段按照一定的比例放大．接下来，我们就会把这两种含义巧妙地结合起来，展现在同一个坐标系上．

从最简单的函数开始：$y=2$和$y=x$ 相乘的结果是什么呢？$y=2$是一条和x 轴水平的直线，它到x 轴的距离有2个单位长；而$y=x$ 表示的是一条45°的斜线．如果直接从图象上来看，两者似乎无法相乘，因为两条直线之间的夹角不是90°．在这里，直接把x 轴本身当作$y=x$ 的图象来看待，在$y=2$和x 轴、y 轴之间就有了一个长方形的空间，我们只要把这个空间的面积求出来，就可以当作$y=2$和$y=x$ 相乘的结果．这个空间的面积是什么呢？它的纵向高度是2，横向的宽度正好就是x 轴上对应的数值，比如$x=1$时，由x 轴、y 轴、$x=1$、$y=2$围成的这个长方形的面积就是$2\times1=2$，而当$x=2$时，这个长方形的面积就是4．［如图14－4（1）所示］依此类推得到如表14－2所示的数据表．

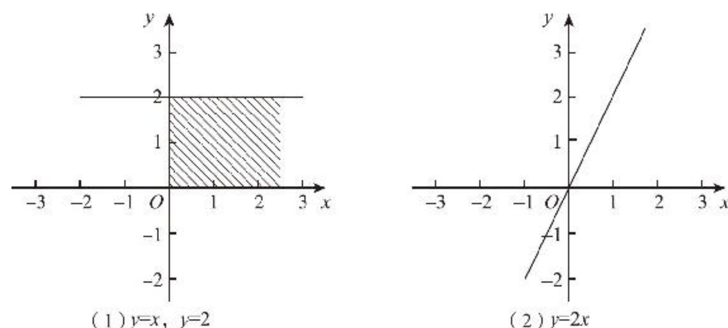


图14－4

表14－2

x	0	1	2	3	4
$y_1=x$	0	1	2	3	4
$y_2=2$	2	2	2	2	2
面积	0	2	4	6	8

根据上述数据，我们不难发现长方形的面积随着x的增大而增大，它和x是正比例的关系，也就是说两个函数相乘的结果是$y=2x$．截至目前，还是把面积当作两个函数的乘积，但是，当函数表达式$y=2x$出来以后，把函数图象画在同一个坐标系上，y的数值就是用纵坐标的长度来代表了．当我们同时把$y=2$和$y=2x$的图象画在同一个坐标系上以后，$y=2$这个直线与x轴之间的面积，正好就是$y=2x$．（如图14－5所示）同样，$y=2x$中，任何一点的纵坐标的大小，也都是$y=2$下方的矩形面积，不但如此，$y=2x$这条直线的斜率恰恰就是$k=2$．这两个函数图象，一个用纵坐标表示了对方的面积，一个用直线表示了对方的斜率．

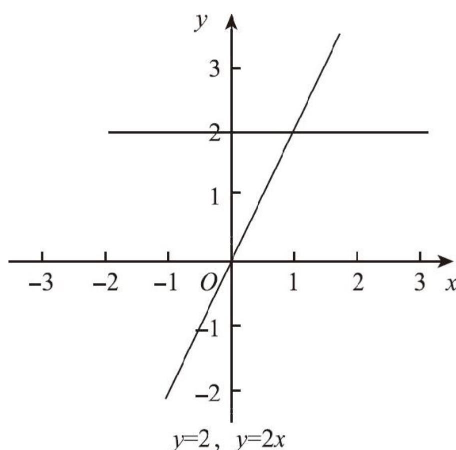


图14－5

上述分析似乎没有得出有价值的结论：两个函数，一个是$y=2$，一个是$y=x$，两者相乘的结果等于$2x$，结果只不过是人所共知的事实而已．但是，如果按照上述方法继续分析下去，就会发现一个完全不同的新世界．如果凭借直觉判断，在$y=2x$的基础上再乘上$y=x$，结果似乎应该等于$2x^2$，而正确结果是x^2，这又是为什么呢？接下来我们就来深入分析：

$y=2x$的函数图象是一条经过原点的斜线，如果要计算它和$y=x$两个函数的乘积，需要计算这条斜线与x轴之间包含的图形的面积．在$x=1$的位置上，我们可以画出一条垂直于x轴的直线，显然，当$x=1$时，$y=2x$的函数值＝2，这就意味着两条直线的交点是（1，2）．同时，因为$y=2x$也经过原点，相互交叉就形成了一个直角三角形，三角

形的底边是x 的坐标值等于1，另一条边是$y = 2x$ 的纵坐标高度等于2，知道了两条直角边，很容易得出三角形的面积$S = 2\times 1\div 2 = 1$．同理，当$x = 2$时，x 轴与$y = 2x$ 的交点是4．［如图14 - 6（1）所示］按此规律，得到三角形的面积随x 的变化规律如表14 - 3所示．

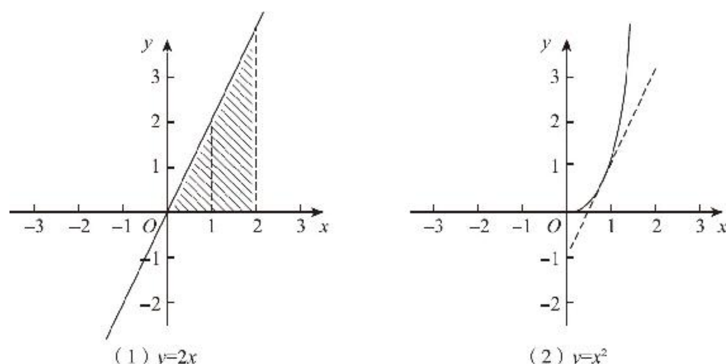


图14 - 6

表14 - 3

x	0	1	2	3	4
$y_1 = 2x$	0	2	4	6	8
三角形面积	0	1	4	9	16

描点绘图以后，得到的结果显然就是$y = x^2$ 的图象，而不是$y = 2x^2$，为什么会这样呢？从图形上来看，这是三角形的面积，三角形的面积等于长乘宽除以2，它不像$y = 2$一样，$y = 2$的这条直线是和x 轴平行的，它截取的面积是长方形，只需要长乘以宽就可以了．从代数表达式上，我们还是不理解，为什么$2x$ 乘以x 以后被无缘无故地缩小了一半．

其实，现在要求的是两个函数的乘积，而随着x 的增长，这两个函数都在不断地变化之中．比如：当$x = 3$时，$y = 2x$ 的结果等于6，两者相乘的确等于$3\times 6 = 18$．然而问题在于，x 并不是一直等于3的，$2x$ 也不是一直等于6的，它们都是从0开始，逐渐变大的．换句话说，现在要求的是两个变化的数的乘积，因此不能用它们最终的结果来表示．

对此，可以举出一个形象的比喻：当工人在劳动时，随着经验不断积累，生产产品的速度也会越来越快：虽然第1天只能生产1件产品，但是当工作到第5天后，他每天都能生产5件产品了．（数据整理见表14 - 4）在这种情况下，如果要求他在第N 天时一共生产了多少件商品，就

不能用最后一天的速度乘以所有的天数，而只能是把每天生产的产品数量累加起来，而这个累加的结果，就相当于两个动态函数的乘积．

表14－4

劳动天数N	1	2	3	4	5
生产速度	1	2	3	4	5
商品总数量	1	3	6	10	15

同理，$y=2x$ 和$y=x^2$ 之间存在的就是这种关系，后者表示的是前者和x 轴之间的面积．现在，让我们把$y=x^2$ 的数字序列依次写下来，分析这些数据会发现另一个有趣的事实：如果我们用y 的下一个数值减去上一个数值，就可以得到函数的$y=x^2$ 增长量，把每一点的增长量写下来就得到了一个奇数序列1、3、5、7、9（见表14－5），每次的差值都是2；如果我们把这些点重新绘制成一条线，就会发现，这是一条和$y=2x$ 平行的线，是的，这就是$y=x^2$ 的增长量的变化规律．于是，$y=2x$ 表示的就是$y=x^2$ 这条抛物线的增长量的规律．

表14－5

x	1	2	3	4	5
$y=x^2$	1	4	9	16	25
增长量	1	3	5	7	9

现在，在同一个坐标系上得到了三个函数图象：$y=2$这条直线表示的是$y=2x$ 的增长率，而$y=2x$ 表示的是$y=2$与x 轴之间的长方形的面积；同理，$y=2x$ 这条斜线表示的是$y=x^2$ 的增长率，而$y=x^2$ 表示的则是$y=2x$ 与x 轴之间的三角形的面积．（如图14－7所示）它们三者之间相互依存地高度融合在一起，同样告诉我们这样一个基本事实：这个世界在变化的背后总是隐藏着不变的规律．像抛物线这样复杂变换的曲线，背后是一条有规律的斜线在支撑，而斜线的数值仍然是变化的，它的背后又是一条永远不变的水平线．就这样，我们依靠函数图象的变换，完成了对这个世界普遍法则的深刻理解．

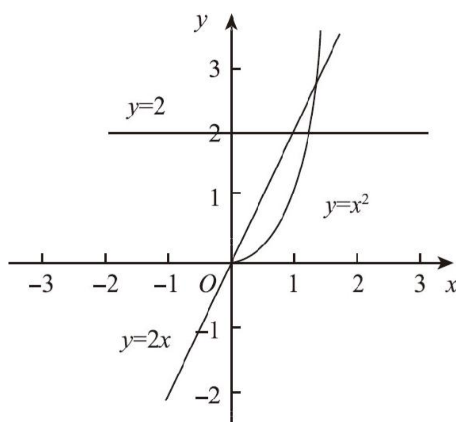


图14 - 7

那么，$y = x^2$ 与x 轴之间的面积如何计算呢？$y = 2$的背后还有没有更本质的规律呢？当然有，这是高等数学微积分的基本内容．只要把一根曲线进行无限切分，切分成最微小的点，尔后发现每一个点的变化规律，这个过程就叫作微分；与之相反，把一个不规则图形切分成无限小以后求得各部分的面积，再把它们累积起来，这个过程就叫作积分．微积分既可以让我们不断剖析规律背后的规律，直至抓住事物的本质，又可以让我们从简单至极的普遍规律出发，一步步推导演化出复杂问题的解决办法．

十五　最后的总结

◎ 让数据告诉我们宇宙的过去和未来

前面我们提到，几何和代数可以让我们根据规律求解出数据，而解析几何可以帮助我们从数据之中发现新的知识，从数据之中发现新知识的过程叫作数据统计分析．在学习过程中，绝大部分课程都是教我们如何利用知识解决问题，而数据统计分析则可以帮助我们透过现象分析本质，通过数据获取知识．

我们在小学阶段学过绘制简单的分析图表，把一系列的数据以柱状图、折线图、饼图等图形的方式呈现，对一列数据进行排序、求和、求平均值，所有这些都是基本的数据分析行为．作出一张图表这只是数据分析的开始，而不是数据分析的结果．无论是通过表格的方式来呈现，还是通过图的方式来呈现，数据的本质并没有改变，所有的这些形式都只是为了方便分析，分析结果应该是数据背后的原因，以及我们应该采取的相应行动．

事实上，数据的统计分析工作是一门高深的学问，这不仅仅是由于数据量非常庞大，需要专业的计算机技术辅助；更是因为数据之间的关系非常复杂．在实际应用中，大部分数据都是通过观察和测量得到的，在此过程中难免产生误差，这就导致数据中原本就存在一些误差和错误，这些数据被形象地称为噪声数据．对于噪声数据，我们可以通过去除一些异常值、取平均值等方式把它们适当地过滤掉．然而，在这些数据当中又会真实存在一些微弱的差异，这些差异一旦被忽略掉，就可能导致我们发现不了事实真相．也就是说，如果对数据观察得太过精细，有可能陷入无意义的噪声之中；如果对数据的统计太过粗略，又容易失去有价值的信息．因此，对于数据分析工作必须慎重．

接下来，我们通过对一个班级的考试成绩进行一次模拟分析，看看如何透过现象发现本质，通过数据找到提高班级成绩的办法．

首先，要保障数据的来源是可靠的．对于一个班级的考试成绩而

言，获取原始数据最方便的渠道就是从班主任手中获得，但是第一手的资料却要从任课老师那里获得，因为班主任手里的成绩也是从任课老师那里得到的．保证了信息来源的准确及时以后，要做数据清洗，去掉一些噪声数据．比如，有因病没有参加考试的同学，在统计的时候就不能把他（她）考虑在内；有刚刚转学来的同学，他（她）的成绩也可以暂时被忽略．

然后，做基本的数据统计．可以先统计出每个同学的总分、平均分、班级名次、分数段，然后统计出各科总分、各科平均分，还要找到以往各学期的对应分数，所有这些都是基本数据统计．

最后，对这些数据进行深入分析．可以从整体到局部地逐步深入，先画出本班在各学期平均分的折线图．假设通过折线图发现，班级的平均分数比上学期提高了，就得到了数据的整体情况，然而这个分析结果只能说明此次考试的总体情况，并不是数据分析的最终目的，我们要分析的是这个结果背后的原因．接下来继续从其他的角度深入分析．

比如：先看看各科平均分的变化情况，假如其他科目平均分变化不大，只有数学平均分提升了，那就说明，班级总分上升的原因是因为数学引起的．但是如果从这个角度分析发现不了规律，各科平均分增减的幅度很小，那么就可以继续从每个分数段的角度分析，看看是成绩好的同学提升了，还是成绩差的同学提升了．如果发现是成绩差的同学提升了，就可以再进一步分析提升的原因，分析到什么程度为止呢？分析到没有数据支撑为止．比如：成绩差的同学变好了的原因是因为近期班级纪律管理得更严格了，然而纪律严格不严格，只是一个定性的描述，很难用数据的方式量化呈现，所以只能分析到这一步，于是得到此次数据分析的结论：本学期平均分上升是由于加强了纪律监督，要维持这种上涨的势头，需要继续维持班级纪律．

在工作学习和生活中，会有诸多原因导致成绩上升或者下降，如果不认真对数据做出统计分析，没有客观的数据作为依据，而是按照自己的主观想象，凭空认定一个理由，那么成绩的上升就不能持续，问题的出现就不能得到妥善的解决．

人是感性的动物，很容易被表面的情感因素所影响，然而数据是理

性客观的结果，在处理很多问题的时候，尊重数据就意味着尊重事实，就意味着实事求是的作风．正是依靠着数据分析的帮助，开普勒才发现了行星运动的定律；正是依靠数据分析的帮助，天文学家才发现了海王星；正是对哈勃望远镜的数据分析，我们才知道了整个宇宙的过去和未来．在现代社会中，数据逐渐成为人类最宝贵的财富，必须高度重视对数据的统计分析．

以上对数据分析做了一个简单的介绍，并且模拟了数据分析的过程，完成了这部分的讲述以后，初中数学课程就要全部结束了．这套课程贯穿了初中数学的绝大部分内容，课程设计的初衷是为了让不了解数学的人爱上数学，内容以数学思想、基础的数学知识和数学在生活中的应用为主，不知道这些内容是否对你有所帮助．

◎ 数学是这个世界的普遍真理吗

今天我们来谈一个最重要的问题，这又是一个颠覆我们“三观”的问题，那就是：数学真的就是这个世界的普遍真理吗？为什么我们还要问这个问题呢？从开篇到现在，一直都在强调数学的真实性．我们曾经说过，就算天天和父母在一起，都不能确定他们是不是自己的亲生父母，但我们从来不会怀疑1 + 1 = 2，为什么现在又要讨论数学的真理性了呢？

数学的真实性超过了我们所熟悉的一切事物，牛顿就是受到了《几何原本》的启发，才构建了自己的物理学公理体系，开启了近代科学的大门．从那个时代开始，人类对自然科学的崇拜就超越了对宗教神灵的崇拜，自然科学崛起的同时也见证了数学的伟大，经济学家、社会学家也都开始通过数学构建自己的知识大厦．既然欧几里得用几条公理就能搭建起整个几何学的大厦，牛顿用几条定律就能搭建起物理学的大厦，那么，我们为什么不能通过分析人类活动的基本规律，构建起经济学和社会学的大厦呢？

与此同时，数学内部的不同分支也在开始重新构建，既然几何学可以通过公理体系搭建，那么逻辑学、代数学、概率等其他数学分支为什么不能同几何学汇集到一起，共同搭建起一个更加宏伟的大厦呢？从17世纪开始，数学家们就开始通过各种方式努力达成这一目标．19世纪末20世纪初，物理学和数学的发展达到了一个历史的顶峰，科学家和数学家普遍相信，除了少部分问题之外，绝大部分问题已经得到解决，人类智慧的终极目标马上就可以实现了．

19世纪的最后一天，开尔文勋爵发表了著名的演讲，他提出了著名的“物理学世界的两朵乌云”，认为只要科学家们再努一把力，把这“两朵乌云”扫清了，物理学的大厦就可以顺利竣工了．不久，数学家希尔伯特发表演说，同样提出了闻名世界的23个数学难题，认为只要这20多个问题解决后，人类也就再无难题了．可是，人类的这种高傲根本没有持续多久．

1905年，一声惊雷炸响，爱因斯坦的相对论诞生了，这一理论彻底地动摇了牛顿力学的基础，相对论时空观的严重离经叛道程度，即使到现在，还有很多人不敢相信．更让人不可思议的是，到了1927年，从物理学的另“一朵乌云”里头，又产生了量子力学这样一个怪诞的理论，海森堡发现了测不准原理，这一下就让包括爱因斯坦在内的物理学家们都傻眼了，虽然说人家相对论看起来很怪异，但是好歹人家有个公式，能算出个准数来，但量子力学却认为，我们无法同时得到一个基本粒子的位置和速度．众所周知，物理学要想获得发展，必须要依靠试验数据的支撑，如果微观粒子的位置和速度测不准，我们还怎么进行深入研究呢？海森堡用概率的方式研究，说白了就是扔硬币、掷骰子．所以爱因斯坦到死都不相信量子力学，他曾经反反复复地叨念着：上帝不会掷骰子的．

物理学的情况如此，数学也好不到哪儿去．就在希尔伯特兴高采烈地搭建自己的公理体系的过程中，1931年，从奥地利冒出来一个年轻的小伙子哥德尔提出了一个著名的不完备定理．这个定理确凿无疑地证明：不是所有的正确的观点都是能被证明的．这就是说，虽然有一些道理有可能是正确的，但是它们却是绝对不能被证明的．这个定理一发布，那些铆足了劲儿立志要搭建公理体系的数学家们，全部都泄气了，大家对数学的那种无上的崇拜之情，也就瞬间消失了．如果这件事情发生在毕达哥拉斯的年代，这些数学家们一定会把哥德尔这个年轻人碎尸万段的，因为这个结论的确太让人沮丧了，而且它还的确是真实的．

定理为什么一定需要证明呢？不能证明也不耽误使用，比如勾股定理，即使不去证明它，不是同样可以使用吗？然而问题在于，哥德尔定理还明白地告诉我们，那些不能被证明的道理之间，相互还会有矛盾冲突．按照常识，如果两个道理相互矛盾，那么两者之间肯定有一个是对的，另一个是错的．但是对不起，根据哥德尔的理论，既不能证明哪个是对的，又不能证明哪个是错的，甚至它们还有可能都是对的，只不过是使用在不同的场景中而已．

尤其重要的是，不能证明，就意味着这些道理之间没有关联关系，如果这个世界上存在很多互不相关的知识，也就意味着我们永远建立不起来一座完美的知识大厦，意味着我们永远找不到这个世界的终极原

理．因为所谓的终极原理就是支撑其他原理的基础理论，也就是说，只有在其他道理都可以由这个道理推导出来的情况下，我们才能证明这一理论就是世界的本源，这也是人类智慧的终极目标．然而现在，哥德尔明确告诉我们，实现这一目标绝无可能．如果是这样的话，我们学知识、增长智慧的目的又是什么呢？

相信大家都听过这样一句话："书山有路勤为径，学海无涯苦作舟．"其实这句话是断章取义的结果．学海无涯是庄子的观点，《庄子》的原文是："人生也有涯，而知也无涯，以有涯随无涯，殆矣！"意思就是说，世界上的知识是学不完的，也不存在一个所谓的终极真理，你用有限的生命追逐无限的知识，是很危险的．庄子的意思再明白不过了，不要浪费时间去学习知识了，有工夫还不如好好歇会呢．过去，我们都以为庄子的观点太过消极，但现在哥德尔的不完备定理告诉我们，庄子的这个观点很有可能是对的！

本书的内容就要结束了，在结束之前，我为什么要带给你一个如此消极的观点呢？三个原因：第一是责任，我有责任告诉你事情的真相，而不能让你在"心灵鸡汤"的麻醉下去学习；第二是权利，一个初中生毕业以后很快就要成年了，你有自己做出选择的权利，你既可以勇敢地挑战数学和自然科学的难题，也可以走向社会解决一些生产生活中的具体问题；第三是勇气，当我们面对未知的领域、面对未来的世界的时候，最重要的不是信心，而是勇气，是知其不可为而为之的勇气．

数千年前，中华民族的祖先开启了农业文明，面对的是一个未知的领域．我想，早在公元前6世纪的那个时代，人类就已经感受到了知识的力量，感受到了知识的魅力，感受到了知识的广博．所以，庄子才会发出"人生也有涯，而知也无涯"的感叹，苏格拉底才会承认自己唯一知道的就是自己的一无所知．但是，当面对无穷无尽的空间结构知识的时候，欧几里得勇敢地整理出了清晰的脉络；当面对纷繁复杂的自然现象时，牛顿勇敢地发现了自然哲学的原理，他们都带领着我们走过了那段黑暗的岁月．他们既有老子的远见卓识，又有开拓进取不断前行的勇气．如今，与两手空空的古人相比，我们已经站在无数巨人的肩膀上了，难道不应该继续秉承他们的智慧和勇气吗？

最后，我必须要指出：虽然数学远不是真理的化身，但它仍然是目前人类智慧的顶峰．一切严肃的学术活动，都需要借助数学语言才能精确地描述；一篇科技学术论文只有通过数学模型的构建和验证才算完成．从数学自身而言，在我们的前面，还有高等数学、拓扑学、混沌理论、概率统计等一座座灯塔在闪闪放光，在这些灯塔的前面仍然存在无尽的空间等待着我们去开拓．为了照亮人类的征程，我们仍需建立一座座更高的灯塔．

你的学习之路刚刚开始．希望你在学习的路上，勇敢地前行，祝愿你取得好的学习成绩，同时更希望数学思维能够陪伴你的一生，照亮你人生前行之路．